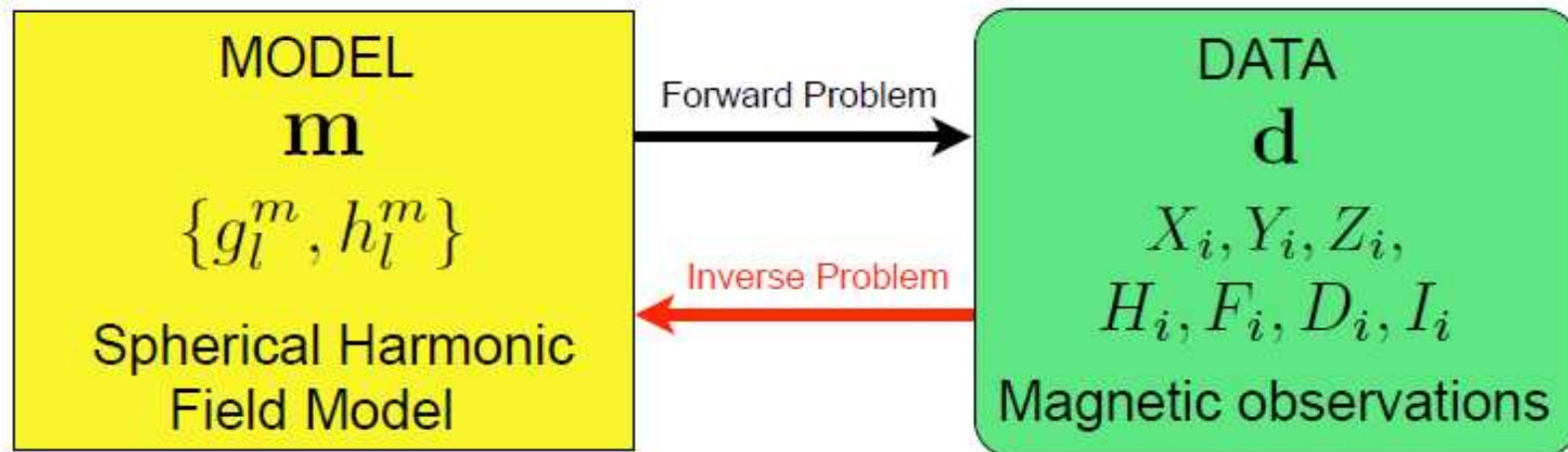


# 5 El problema inverso geomagnético

- <http://isdc.gfz-potsdam.de> - CHAMP Project, Information System and Data Center (ISDC), GFZ Potsdam.
- <http://www.intermagnet.org> - INTERMAGNET Home Page.
- <http://isgi.cetp.ipsl.fr> - ISGI Home page.
- <http://www.ngdc.noaa.gov> - NOAA's Geophysical Data Center; Working Group V-MOD, IAGA.
- <http://www.spacecenter.dk> - Scientific Data and Models, Danish National Space Center.
- <http://wdc.kugi.kyoto-u.ac.jp> - World Data Centre for Geomagnetism, Kyoto.
- [http://omniweb.gsfc.nasa.gov/vitmo/cgm\\_vitmo.html](http://omniweb.gsfc.nasa.gov/vitmo/cgm_vitmo.html) - Virtual Ionosphere, Thermosphere, Mesosphere Observatory (VITMO).
- <http://www.geomag.bgs.ac.uk> - British Geological Survey, Geomagnetism.

# 5.1 Introducción al problema inverso geomagnético

- En la última clase, vimos que armónicos esféricos pueden ser usados para definir un modelo global del campo geomagnético.
- De este modelo, podemos determinar cualquier componente magnética en cualquier punto de interés (fuera de las regiones de la fuente).
- Pero ... ¿cómo obtenemos los coeficientes de Gauss que definen el modelo armónico esférico que mas parece las observaciones que existen?
- Este es un problema inverso.



# 5.1 Introducción al problema inverso geomagnético

- Para simplicidad en este ejemplo, consideremos solamente las observaciones X y Z que son linealmente relacionados con el modelo armónico esférico. Por ejemplo:

$$X_i = \sum_{l=1}^L \sum_{m=0}^l \left( \frac{a}{r_i} \right)^{l+2} (g_l^m \cos m\phi_i + h_l^m \sin m\phi_i) \frac{dP_l^m}{d\theta}(\theta_i)$$

$$Z_{i+1} = - \sum_{l=1}^L \sum_{m=0}^l (l+1) \left( \frac{a}{r_{i+1}} \right)^{l+2} (g_l^m \cos m\phi_{i+1} + h_l^m \sin m\phi_{i+1}) P_l^m(\theta_{i+1})$$

- Aquí,  $i, i+1$  etc. están las observaciones actuales a un cierto radio, latitud y longitud.

# 5.1 Introducción al problema inverso geomagnético

Podemos reescribir las ecuaciones para las observaciones usando matrices,  $d = Am$ , donde:

$$d = \begin{pmatrix} X_i \\ Z_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{r_i}\right)^3 \frac{dP_1^0}{d\theta}(\theta_i) & \left(\frac{a}{r_i}\right)^3 \cos \phi_i \frac{dP_1^1}{d\theta}(\theta_i) & \left(\frac{a}{r_i}\right)^3 \sin \phi_i \frac{dP_1^1}{d\theta}(\theta_i) & \cdot & \cdot \\ -2 \left(\frac{a}{r_{i+1}}\right)^3 P_1^0(\theta_{i+1}) & -2 \left(\frac{a}{r_{i+1}}\right)^3 \cos \phi_{i+1} P_1^1(\theta_{i+1}) & -2 \left(\frac{a}{r_{i+1}}\right)^3 \sin \phi_{i+1} P_1^1(\theta_{i+1}) & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$
$$m = \begin{pmatrix} g_1^0 \\ g_1^1 \\ h_1^1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Si conocemos  $m$  y  $A$  entonces podemos predecir las observaciones  $d$ , pero ¿cómo vamos de  $d$  a  $m$ , especialmente si las observaciones están imperfectas?

# 5.1 Introducción al problema inverso geomagnético

- Para resolver el problema inverso geomagnético, debemos invertir la ecuación de matrices:

$$m = A^{-1}d$$

- Pero  $A$  usualmente no es una matriz cuadrada (el número de parámetros del modelo ( $P$ ) usualmente es desigual a la cantidad de puntos de datos ( $N$ )), entonces no podemos encontrar la inversa de  $A$ .

- Entonces, multiplicamos por  $A^T$  para llegar a

$$A^T d = (A^T A)m$$

- Y multiplicando ambos lados por  $(A^T A)^{-1}$  (que uno se puede encontrar porque  $(A^T A)$  es cuadrada) podemos encontrar la solución por  $m$ :

$$m = (A^T A)^{-1}(A^T d)$$

# 5.1 Introducción al problema inverso geomagnético

- Mas formalmente, podemos definir el error cuadrado total entre las predicciones de un modelo y las observaciones actuales como:

$$E^2 = \sum_{i=1}^N e_i^2 = \sum_{i=1}^N \left( d_i - \sum_{j=1}^P A_{ij} m_j \right)^2$$

- Para encontrar el modelo que minimiza esta cantidad, requerimos:

$$\frac{\partial(E^2)}{\partial m_k} = 0 \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^N \left( d_i - \sum_{j=1}^P A_{ij} m_j \right) (-A_{ik}) = 0$$

- Podemos escribir eso para llegar a la solución anterior para  $m$ :

$$\sum_{j=1}^P \sum_{i=1}^N A_{ik} A_{ij} m_j = \sum_{i=1}^N A_{ik} d_i \quad \text{o} \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{m} = \mathbf{A}^T \mathbf{d}$$

# 5.1 Introducción al problema inverso geomagnético

- Mas generalmente, los datos (por ejemplo observaciones magnéticas como F, H, I, D) están cualquier función de los parámetros del modelo:

$$\mathbf{d} = f(\mathbf{m})$$

- En este caso la mínima cuadrada 'función objetivo' que debemos minimizar es:

$$\Theta = [\mathbf{d} - f(\mathbf{m})]^T [\mathbf{d} - f(\mathbf{m})]$$

- Si estimaciones de la imprecisión de las mediciones son conocidas, la inverso de la matriz de covarianza podría estar usado para dar peso a las componentes de la función  $\Theta$ ,

$$\Theta = [\mathbf{d} - f(\mathbf{m})]^T \mathbf{C}_e^{-1} [\mathbf{d} - f(\mathbf{m})]$$

- donde los elementos diagonales de  $\mathbf{C}_e^{-1}$  son  $\frac{1}{\sigma_i^2}$ .

# 5.1 Introducción al problema inverso geomagnético

- En varios problemas inversos geofísicos:
  1. Los modelos podrían ser muy complicados, y poseen muchas “espacios nulos” que no son restringidos por los datos.
  2. Los datos podrían estar ‘contaminado’ por grandes errores, y partes del modelo podrían estar muy sensibles a ruido en los datos.
  3. Entonces muchos modelos podrían estimar los datos, dentro de las estimaciones de error, y la minimización cuadrada no necesariamente encuentra un modelo fiable (de un punto de vista geofísico).
- Para resolver el problema de no unicidad en problemas inversos, hay que minimizar no solamente la solución de mínima cuadrada, pero también poner constraints sobre la complejidad del modelo. Por ejemplo, en el caso de armónicos esféricos y el campo geomagnético, tomando la expansión de las armónicas hasta un cierto grado  $L$  es un constraint sobre la complejidad del potencial geomagnético que esta descrito por el modelo.



## 5.2 Un problema inverso simple

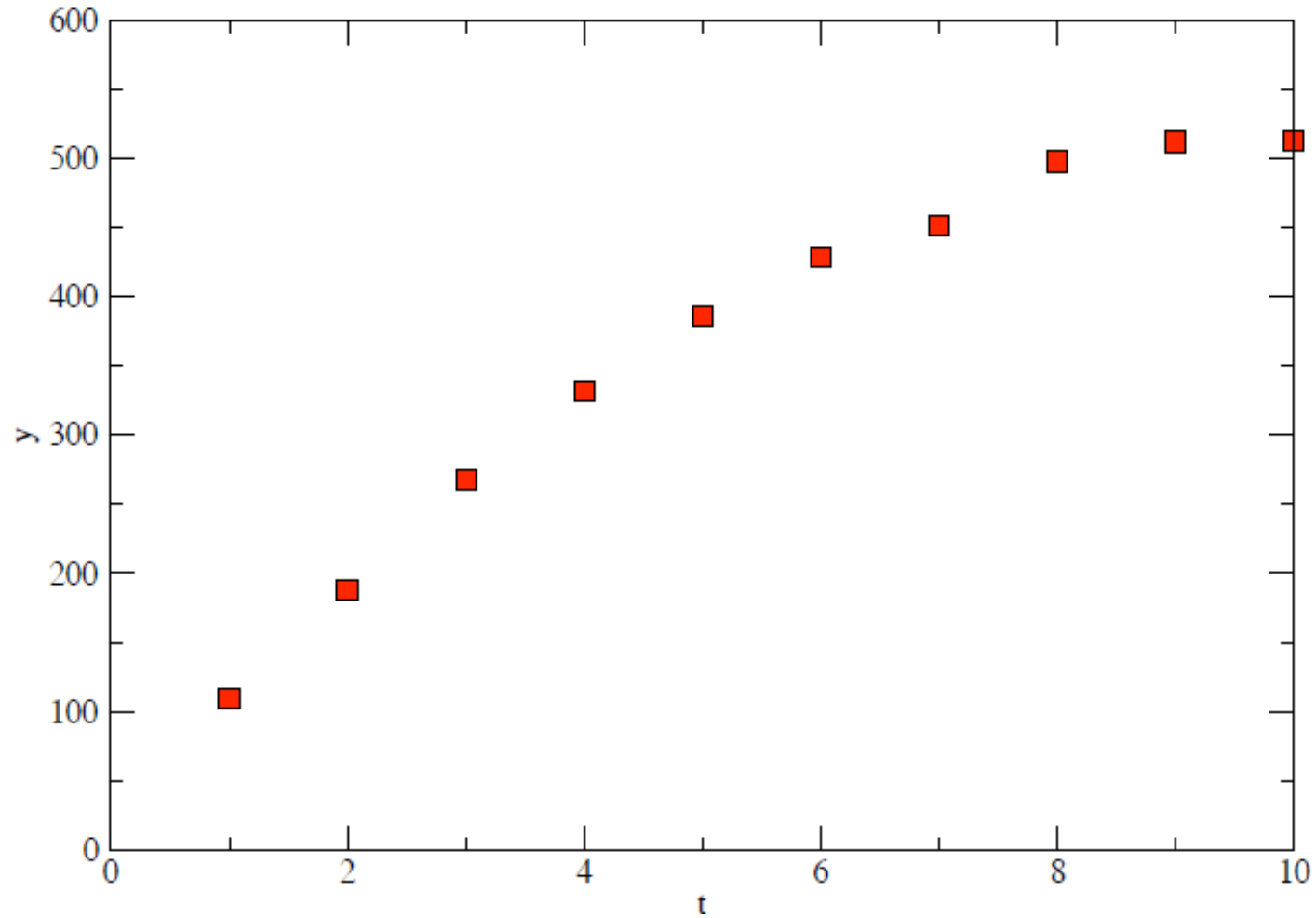
- Consideremos un problema inverso simple, encontrando una solución mínima cuadrada para un modelo del movimiento de una proyectil:

$$y(t) = m_1 + m_2t - 0.5m_3t^2$$

- Tomando en cuenta las mediciones de datos:

t	y
1	109.4
2	187.5
3	267.5
4	331.9
5	386.1
6	428.4
7	452.2
8	498.1
9	512.3
10	513.0

## 5.2 Un problema inverso simple



## 5.2 Un problema inverso simple

- En la forma de matrices,  $d = Am$ :

$$\begin{pmatrix} 109.4 \\ 187.5 \\ 267.5 \\ 331.9 \\ 386.1 \\ 428.4 \\ 452.2 \\ 498.1 \\ 512.3 \\ 513.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -0.5 \\ 1 & 2 & -2.0 \\ 1 & 3 & -4.5 \\ 1 & 4 & -8.0 \\ 1 & 5 & -12.5 \\ 1 & 6 & -18.0 \\ 1 & 7 & -24.5 \\ 1 & 8 & -32.0 \\ 1 & 9 & -40.5 \\ 1 & 10 & -50.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

- Noten que  $A_i = [1, t_i, -0.5t_i^2]$  es usado para generar las filas de  $A$ .

## 5.2 Un problema inverso simple

- Para determinar los parámetros del modelo  $(m_1, m_2, m_3)$ , usamos la solución mínima cuadrada:

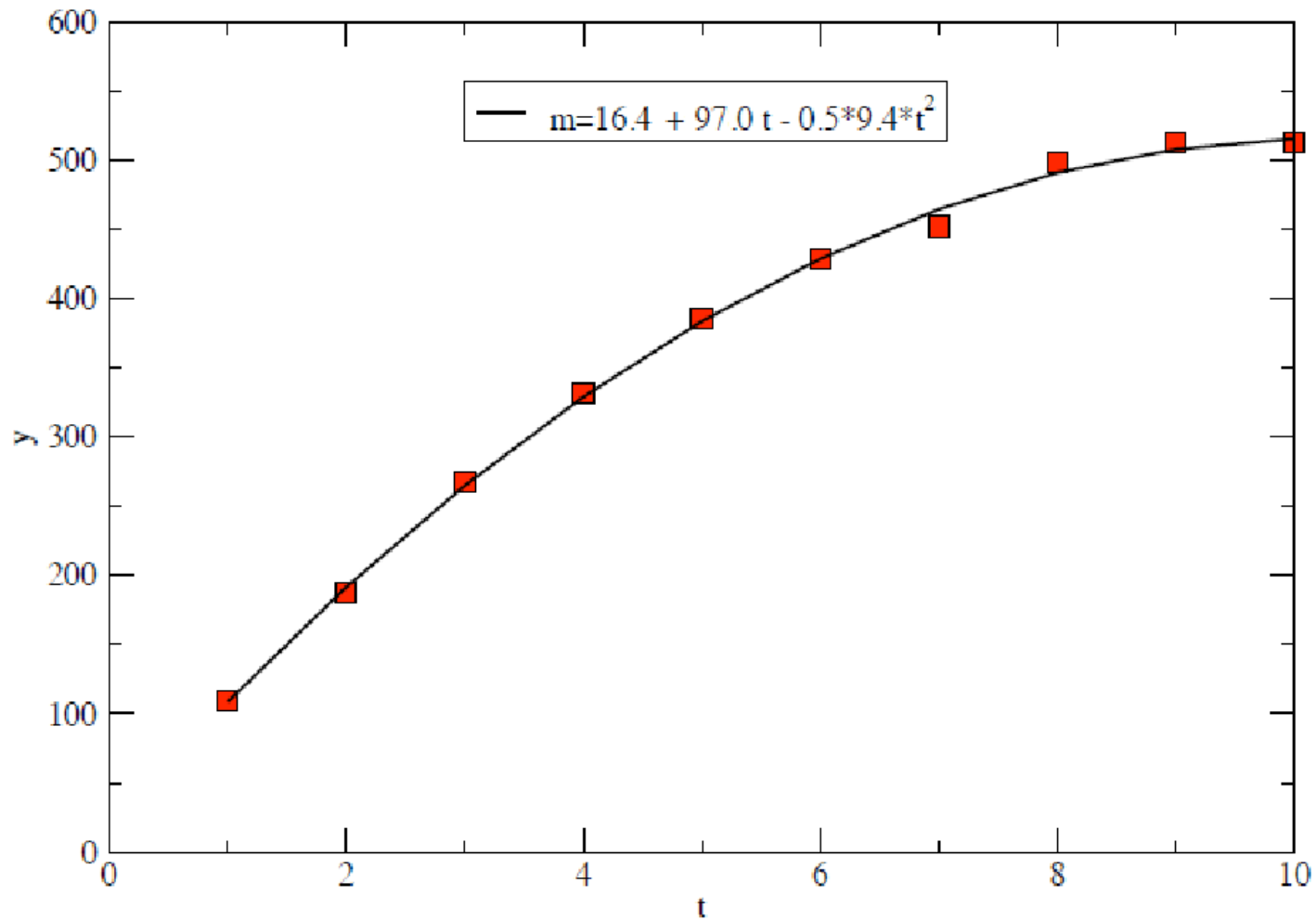
$$\mathbf{m} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{d})$$

- Construyendo  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$  y  $(\mathbf{A}^T \mathbf{d})$  de la matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{d}$ , después haciendo la inversión de  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$  para combinar con  $(\mathbf{A}^T \mathbf{d})$  nos lleva a la solución para  $\mathbf{m}$ :

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 16.4 \\ 97.0 \\ 9.4 \end{pmatrix}$$

- Noten que para encontrar el inverso de una matriz  $n \times n$ , existen métodos basados en operaciones en sus filas: <http://mathworld.wolfram.com/MatrixInverse.html>

## 5.2 Un problema inverso simple



## 5.3 La continuación descendente al núcleo

- Para mostrar la utilidad de los armónicos esféricos consideremos las componentes del campo geomagnético en la frontera núcleo-manto, un lugar donde claramente no podemos tomar mediciones.
- Recuerden que la expansión de armónicos esféricos para la componente Z del campo geomagnético debido a las fuentes internas es:

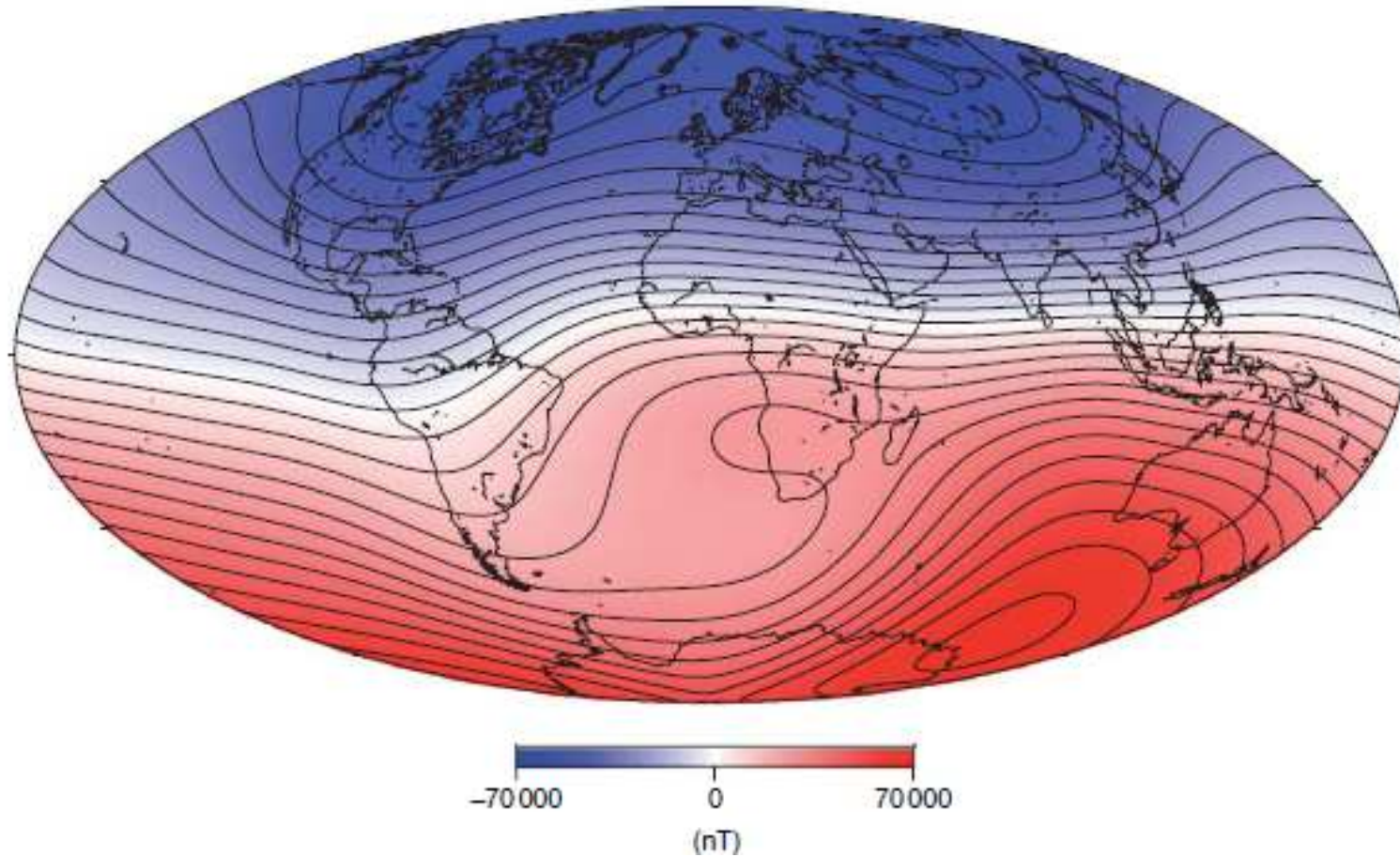
$$Z = - \sum_{l=1}^L \sum_{m=0}^l (l+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+2} (g_l^m \cos m\phi + h_l^m \sin m\phi) P_l^m(\theta)$$

- Si se supone que el manto no contiene fuentes del campo magnético (es decir, tiene muy poca conductividad) podemos simplemente cambiar  $r$  de 6371 km a 3481 km en el modelo.
- Cada armónico esférico en la superficie de la Tierra es multiplicado por un factor de

$$(l+1) \left(\frac{a}{c}\right)^{l+2}$$

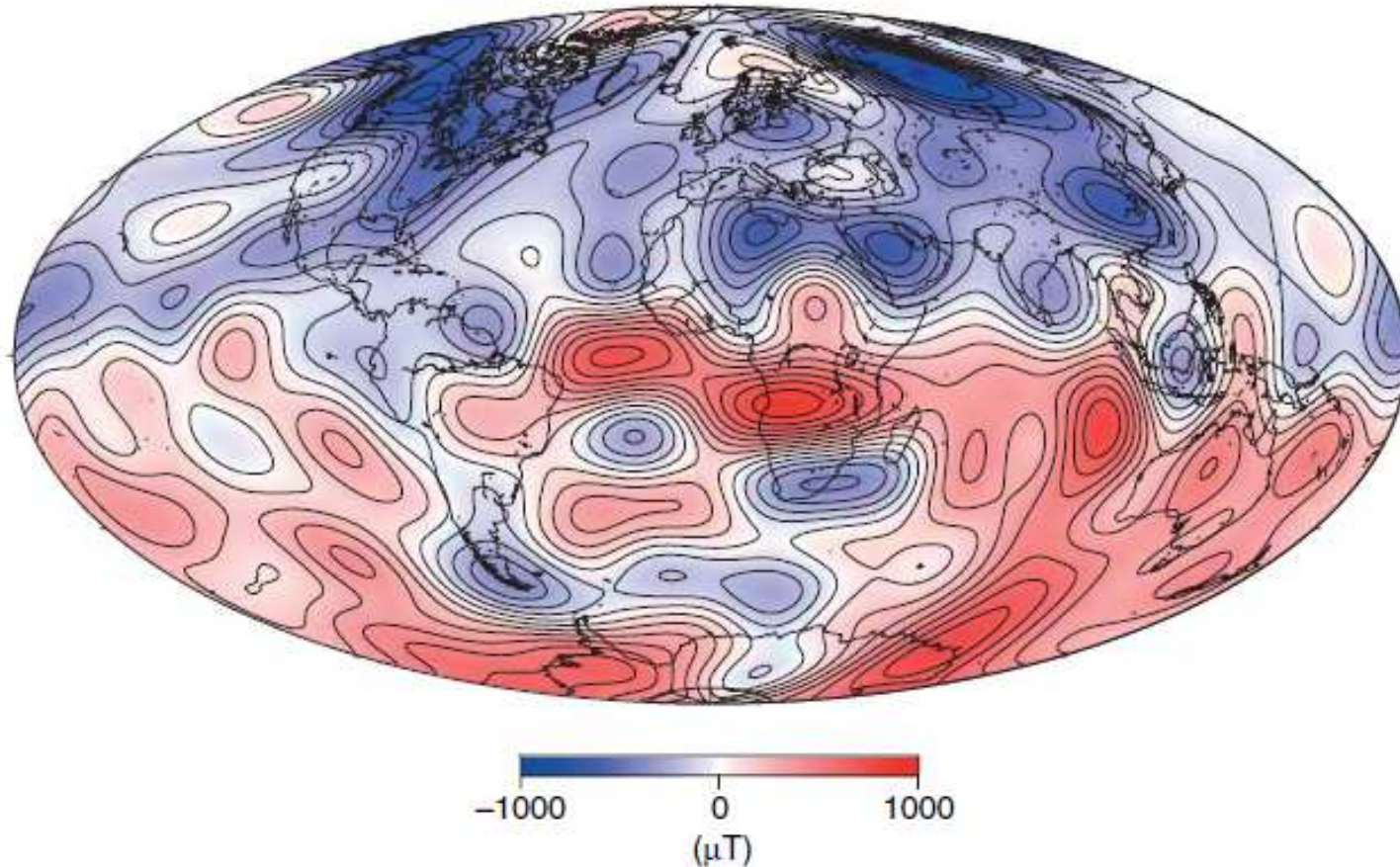
- $a$  es el radio de la Tierra, y  $c$  el radio del núcleo. Porque  $a \gg c$ , los armónicos con mayor  $l$  están amplificados más en la continuación descendente.

## 5.3 La continuación descendente al núcleo



Componente del campo radial,  $B_r$ , en la superficie de la Tierra en 2005, dado por el modelo CHAOS (satélite CHAMP).

## 5.3 La continuación descendente al núcleo



Componente del campo radial,  $B_r$ , en la superficie del núcleo en 2005, dado por el modelo CHAOS (satélite CHAMP).



## 5.4 Las propiedades de $B$ en la superficie del núcleo

- **Concentración del flujo a altas latitudes:** Fuertes concentraciones del campo, dos en cada hemisferio, mayormente son responsables para el campo predominantemente dipolar en la superficie de la Tierra.
- **Zonas de flujo invertido:** Características sorprendentes con una polaridad opuesta al campo dominante dipolar en la superficie del núcleo (noten que hay una zona bajo el Atlántico del Sur).
- **Trenes de ondas ecuatoriales:** Una serie de altas y bajas en el campo, similares a trenes de ondas en la atmósfera, se encuentran a bajas latitudes, especialmente debajo del Atlántico.
- **Un Atlántico activo, un Pacífico tranquilo:** Diferencias entre los dos hemisferios (Atlántico y Pacífico) están observados. Las concentraciones mas prominentes del campo se encuentran debajo del Atlántico.