513324 Geomagnetismo - Tarea 3

Problema 1. La ley de Ohm para la densidad de corriente ($\mathbf{J}$) es

$$\mathbf{J} = \sigma\left(\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})\right)$$

donde σ es la conductividad.

(a)[1 pt] Use la ley de Ampere, con $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$, para llegar a

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

(b)[1 pt] Tome el rotor ($\nabla\times$) de ambos lados, use la regla $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$, y use las ecuaciones de Maxwell para llegar a la ecuación de inducción magnética:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{B}$$

(c)[1 pt] Explique las suposiciones usadas para obtener la ecuación de difusión desde la parte (b):

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{B}$$

(d)[2 pts] Asuma un campo externo sinusoidal, $B(z,t) \equiv B(z) e^{i\omega t}$, sobre un semi-espacio con conductividad σ. Use la ecuación de difusión de (c) para mostrar que una solución para el campo magnético en el semi-espacio es, con B_0 constante,

$$B(z,t) = B_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})}, \text{ cuando } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}.$$

(e)[1 pt] ¿Matemáticamente, que representa δ?

(f)[1 pt] Use su respuesta de (e) para hacer una estimación de la frecuencia máxima con que es posible investigar un embalse geotérmico, usando métodos magnetotelúricos, de 4 km de diámetro y 4 km de profundidad, con $\sigma = 0.01$ S/m en la corteza.

(g)[1 pt] Usando $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$. ¿Es posible tener transmisión por el manto desde un campo que oscila a altas frecuencias en el núcleo, con suficiente amplitud para poder medirlo en la superficie? (Use $\sigma = 1$ S/m en el manto).

Problema 2. Las ecuaciones que gobiernan la electrodinámica de la dinamo de un disco que se auto excita son

$$\varepsilon = \frac{\Omega}{2\pi}\Phi \quad \text{donde} \quad \Phi = \int_S B_z dS \quad (\,\varepsilon \text{ es la EMF inducida})$$

$$\Phi = MI \quad \text{(La inducción mutua entre el alambre y el disco)}$$

$$\varepsilon = L\frac{dI}{dt} + RI \quad \text{(Cambios en la corriente son producidos por los efectos de inducción y resistencia)}$$

donde ε es la EMF inducida por el movimiento del disco (área S, girando con una velocidad angular Ω por un campo magnético $\mathbf{B}$ que tiene una componente B_z perpendicular al disco. Φ es el flujo magnético por el disco, M es la inductancia mutua entre el alambre y el disco, I es la corriente en el alambre, R es la resistencia en el circuito y L es la auto-inductancia del circuito.

(a)[2 pts] Eliminando Φ y ε de estas ecuaciones muestre que la ecuación que controla el sistema es

$$L\frac{dI}{dt} = \left(\frac{\Omega M}{2\pi} - R\right) I$$

(b)[2 pts] Encuentre una solución para $I(t)$ separando las variables e integrando.

(c)[2 pts] ¿Cuál es la condición para que $I(t)$ crezca en el tiempo?

(d)[2 pts] En una dinamo de un disco actual, ¿sigue creciendo el corriente indefinidamente? Dé razones por su respuesta, asumiendo que un torque estático G maneja el movimiento del disco.