Ondas Planas

La ecuación de onda, por ejemplo, se refiere a una función ϕ que satisface

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

donde α representa la velocidad de propagación de la onda, que en este caso corresponde a la onda P.

Solución 1-D

La solución general para esta ecuación (en 1-D) es

$$\phi = A\ sin(kx - \omega t + f) \tag{2}$$

que representa una oscilación con número de onda k, frecuencia angular ω y fase f. Si se considera un x fijo, la solución representa una oscilación en el tiempo en un punto determinado, por otra parte si se considera t fijo, se tiene una oscilación en distancia en un instante determinado.
Reemplazando esta solución en la ecuación (1), se obtiene la relación entre α, ω y k

$$\begin{aligned} A\,k^2\,\phi - \frac{1}{\alpha^2} A\,(-\omega)^2\,\phi &= 0 \\ k^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} &= 0 \\ \alpha &= \frac{\omega}{k} \end{aligned} \tag{3}$$

También se puede escribir la solución oscilatoria como[1]

$$\phi = A'\,e^{i(kx-\omega t)} \equiv (A_1 + iA_2)[cos(kx-\omega t) + i\,sin(kx-\omega t)] \tag{4}$$

En este caso la oscilación se obtiene tomando la parte real de esta solución

$$Re\{\phi\} = A_1\,cos(kx-\omega t) - A_2\,sin(kx-\omega t) \tag{5}$$

Comparando la ecuación (2) con la ecuación (5) se tiene[2]

$$\begin{aligned} A\,sin(kx-\omega t+f) &= A_1\,cos(kx-\omega t) - A_2\,sin(kx-\omega t) \\ A\,sin(kx-\omega t)\,cos(f) + A\,cos(kx-\omega t)\,sin(f) &= A_1\,cos(kx-\omega t) - A_2\,sin(kx-\omega t) \\ \Rightarrow A\,sin(f) &= A_1 \\ A\,cos(f) &= -A_2 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad A_1^2 + A_2^2 = A^2 \tag{6}$$

$$tan(f) = -\frac{A_1}{A_2} \tag{7}$$

que entrega la relación entre A, f, A_1 y A_2.

[1] $e^{i\theta} = cos\,\theta + i\,sin\,\theta$

[2] $sin(x+y) = sin\,x\ cos\,y + cos\,x\ sin\,y$

Solución 3-D

En el contexto de este curso las soluciones siempre estan dadas para una sola frecuencia. Para el caso de un sismograma que es una mezcla de distintas frecuencias, podemos escribir

$$\phi = \int_0^\infty A'(\omega) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} d\omega \tag{8}$$

que es la solución por separación de variables, con $\omega = \alpha\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. Esta solución pertenece al grupo de soluciones de la forma $g(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$ donde g es cualquier función, denominadas *ondas planas*.

Ondas Planas

La función g es constante, para un cierto t, cuando $k_x x + k_y y + k_z z = cte$, la cual representa la ecuación para un plano con vector normal $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Entonces en estos planos, la oscilación tiene la misma amplitud y fase.

Ahora, calculamos la posición en un tiempo $t + dt$ del mismo plano, donde el plano se mueve dx, dy, dz, es decir

$$\begin{aligned} k_x(x+dx) + k_y(y+dy) + k_z(z+dz) - \omega(t+dt) &\equiv k_x x + k_y y + k_z z - \omega t \\ \Rightarrow \qquad k_x dx + k_y dy + k_z dz - \omega dt &= 0 \\ (\vec{k}\cdot\vec{dx}) - \omega dt &= 0 \\ |\vec{k}||\vec{dx}| cos\,\theta - \omega dt &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{k}$ y $\vec{dx}$. Cuando el plano se mueve, $|\vec{dx}|cos\,\theta$ es la separación entre los planos resuelta en la dirección $\vec{k}$, es decir la distancia $|\vec{dx}|cos\,\theta$ es perpendicular entre los planos, entonces $|\vec{dx}|cos\,\theta = |\vec{dx}_\perp|$ y se tiene

$$\begin{aligned} |\vec{k}||\vec{dx}_\perp| - \omega dt &= 0 \\ \Rightarrow \qquad \omega &= \frac{|\vec{dx}_\perp|}{dt}\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \end{aligned} \tag{10}$$

lo cual muestra que el plano viaja en la dirección de su vector normal con velocidad $\frac{|\vec{dx}_\perp|}{dt}$, que equivale a α de la solución por separación de variables, que es la velocidad de propagación de la onda.

8 de Junio de 2017
Ignacio Pozo Rocha