Apuntes de Análisis de datos sismológicos - 513513

1. Sismómetros

La superficie de la Tierra esta bajo oscilaciones permanentes que podemos detectar gracias a un sismómetro. Un sismómetro es el instrumento que mide el movimiento del suelo, mientras que el sismógrafo es el equipo completo, que incluye un sismómetro, para detectar, grabar y transmitir o guardar datos sísmicos. El sensor sísmico moderno mide movimiento del suelo y lo trasforma a voltaje,
En el estudio de la sismología, las mediciones estan en el campo del desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ (o velocidad o aceleración).

1.1. Inerciales

Consideremos componente en el eje vertical (z)
La forma más simple es considerar la Figura 1.1a, donde muestra que cuando hay algún movimiento en el suelo entonces la masa que esta unida al resorte comenzará a oscilar con un movimiento armónico simple. Aquí hacemos la suposición del que el sismómetro esta conectado rígidamente a la Tierra. El problema de esta configuración es que teoricamente no se detendrá nunca. Consideremos ahora la Figura 1.1b, en la cual se ha puesto un fluído para amortiguar la masa. El movimiento de la masa corresponderá a un movimiento armónico amortiguado. En la Figura 1b $u(t)$ representa el desplazamiento vertical del suelo (Tierra) y $z(t)$ es el desplazamiento de la masa con respecto al suelo. Ambos desplazamientos son relativos a sus posiciones en reposo. El desplazamiento absoluto de la masa estará dado por la suma de $u(t) + z(t)$.

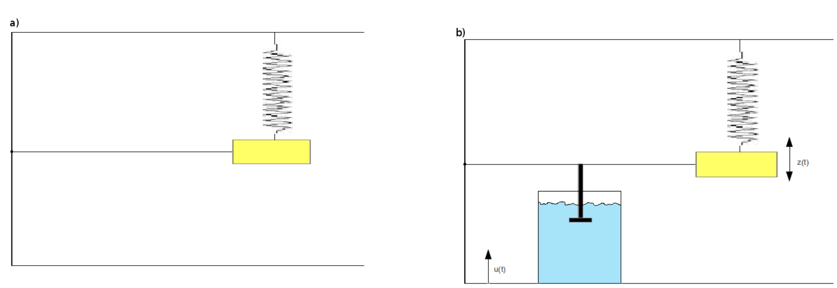

Figura 1.1: Sismómetro: (a) inercial simple, (b) inercial amortiguado.

La fuerza sobre la masa del resorte, F_s se opondrá al desplazamiento y estará dada por

$$F_s = -kz$$

donde k es la constante del resorte. Por otro lado, la fuerza de amortiguamiento viscoso es proporcional a la velocidad de la masa, como

$$F_d = -D\frac{dz}{dt}$$

con D el coeficiente de amortiguamiento.
Usando la segunda ley de Newton, escribimos

$$\begin{aligned} F &= ma \\ -kz - D\frac{dz}{dt} &= m\frac{d^2}{dt^2}(u(t) + z(t)) \\ \ddot{z}(t) + \frac{D}{m}\dot{z}(t) + \frac{k}{m}z(t) &= -\ddot{u}(t) \end{aligned}$$

con m la masa. Haciendo $\omega_0^2 = k/m$, con ω_0 frecuencia angular de resonancia del sistema sin amortiguamiento ($D = 0$), y $2\epsilon = D/m$, con ϵ el parámetro de amortiguación, obtenemos

$$\ddot{z}(t) + 2\epsilon\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = -\ddot{u}(t) \tag{1.1}$$

El movimiento de la masa y el movimiento del suelo estan relacionados por medio de la función de respuesta en frecuencia del instrumento. Para obtener esta función consideremos el desplazamiento armónico de la Tierra de la forma:

$$u(t) = U(\omega)e^{-i\omega t} \tag{1.2}$$

donde $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular. Análogamente, el desplazamiento de la masa puede ser expresado como:

$$z(t) = Z(\omega)e^{-i\omega t} \tag{1.3}$$

que corresponden a las transformadas de Fourier de los desplazamientos. Esto nos permite obtener las funciones en el dominio de la frecuencia.
Sustituyendo 1.2 y 1.3 en 1.1 tenemos

$$\begin{aligned} Z(\omega)\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}e^{-iwt}\right) + 2\epsilon Z(\omega)\frac{d}{dt}e^{-iwt} + \omega_0^2 Z(\omega)e^{-iwt} &= -U(\omega)\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}e^{-iwt}\right) \\ (-\omega^2)Z(\omega)e^{-iwt} - 2\epsilon i\omega Z(\omega)e^{-iwt} + \omega_0^2 Z(\omega)e^{-iwt} &= \omega^2 U(\omega)e^{-iwt} \\ -\omega^2 Z(\omega) - 2\epsilon i\omega Z(\omega) + \omega_0^2 Z(\omega) &= \omega^2 U(\omega) \end{aligned}$$

o

$$Z(\omega) = \frac{\omega^2}{-\omega^2 - 2\varepsilon i\omega + \omega_0^2}U(\omega) \tag{1.4}$$

$$Z(\omega) = \mathcal{Z}(\omega)U(\omega) \tag{1.5}$$

con $\mathcal{Z}(\omega) = \frac{\omega^2}{-\omega^2 - 2\varepsilon i\omega + \omega_0^2}$ es la función de respuesta en frecuencia del sensor o respuesta del instrumento. Esta función es compleja y en coordenadas polares se expresa como

$$\mathcal{Z}(\omega) = A(\omega)e^{i\phi(\omega)}$$

donde $A(\omega) = |\mathcal{Z}|$ y la fase ϕ son números reales.
La magnitud del amortiguamiento relativa a la rigidez del resorte es descrita por:

$$h = \frac{\epsilon}{\omega_0} \tag{1.6}$$

donde h es la constante de amortiguamiento. Con $\epsilon = \omega_0$, es decir, cuando $h = 1$ el sistema esta criticamente amortiguado, lo que significa que la masa retornará a su posición de reposo en el tiempo mínimo posible, sin oscilar alrededor de su posición de reposo. En general, los sismómetros son óptimos con valores de amortiguación cercanos al crítico (en general, $h = 0{,}7$). La Figura 1.2 muestra las curvas de de respuesta en amplitud y fase para diferentes constantes de amortiguamiento.

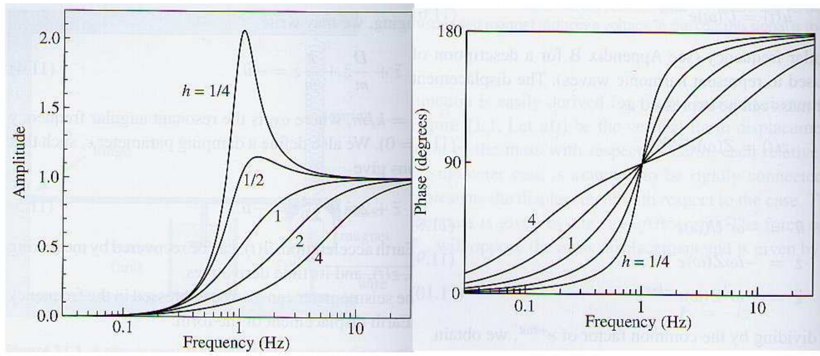

Figura 1.2: Respuesta en amplitud (izquierda) y fase (derecha) para diferentes constantes de amortiguamiento.

1.2. Electromagnéticos

Los sismómetros modernos o sismómetros electromagnéticos tienen el mismo principio que los inerciales o mecánicos: una masa con un resorte, pero el método de detección del movimiento de la masa envuelve inducción electromagnética. La Figura 1.3 muestra un simple sistema representando un sismómetro electromagnético. Vemos que la masa esta conectado a una resistencia externa que tiene como función amortiguar el movimiento del péndulo. Para obtener el valor de la constante de amortiguamiento $h = 0{,}7$ se usa una resistencia con valor $R_e = 20k\Omega$

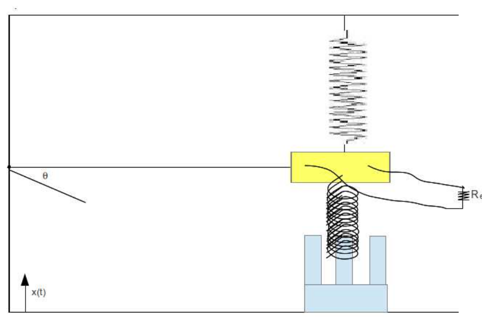

Figura 1.3: Sismómetro electromagnético.

La ecuación de movimiento en el caso de este sismḿetro esta dada por

$$K\ddot{\theta} + D\dot{\theta} + U\theta = -MHx - GI \tag{1.7}$$

donde θ es el movimiento angular del péndulo, x es el desplazamiento del suelo, M la masa del péndulo, H la longitud desde el punto de pivote hasta el centro de masa del sistema, I la corriente eléctrica, G sensibilidad de voltaje del péndulo, K momento de inercia del péndulo, D el coeficiente de amortiguamiento del péndulo ($D \approx 0$ para el caso del aire), U coeficiente relacionado a la constante del resorte y t tiempo.
El voltaje inducido, el cual es proporcional a la velocidad de la masa, se escribe como

$$V_s = G\dot{\theta} \tag{1.8}$$

La corriente inducida está dada por la ley de Ohm como $I = V_s/R$. Reemplazando el valor de la ec. 1.8, y sabiendo que la resistencia estará dada por la suma de las resistencias de la bobina (R_b) y externa (R_e) tenemos

$$\begin{aligned} I &= \frac{V_s}{R_b + R_e} \\ I &= \frac{G\dot{\theta}}{R_b + R_e} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Sustituyendo 1.9 en 1.7 y usando $D = 0$ en el aire, podemos escribir la ecuación de movimiento como

$$\begin{aligned} K\ddot{\theta} + \frac{G^2}{R_b + R_e}\dot{\theta} + U\theta = -MHx \\ \Rightarrow \ \ddot{\theta} + \frac{G^2}{K(R_b + R_e)}\dot{\theta} + \frac{U}{K}\theta = -\frac{MH}{K}x \end{aligned} \tag{1.10}$$

Haciendo $2\epsilon = \frac{G^2}{K(R_b+R_e)}$, $\omega_0^2 = \frac{U}{K}$ y $l = \frac{K}{MH}$ el cual representa el largo del péndulo simple equivalente, escribimos

$$\ddot{\theta} + 2\epsilon\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = -\frac{1}{l}x \tag{1.11}$$

Vemos que las ecuaciones 1.1 y 1.11 son bastante similares. Para este caso usamos también $h = \frac{\epsilon}{\omega_0}$ que depende de la resistencia externa y que es la constante de amortiguamiento.

2. Polos y Ceros

Como se ha mencionado antes, para obtener el movimiento de la Tierra medimos el movimiento de un sistema de péndulos que forman el instrumento. Para poder ver las mediciones reales del movimiento del suelo, debemos saber cómo responde el instrumento al movimiento y restarle.$^{\text{es}}$a respuesta a los datos. Para ver la respuesta del instrumento es mejor trabajar en el dominio de Laplace.
La transformada de Laplace sirve para solucionar ecuaciones diferenciales lineales, donde funciones armónicas, integrales y derivadas se transforman en funciones lineales en s, con $s = \sigma + i\omega$ es una variable compleja y es la variable en el dominio de Laplace. Un caso particular de Laplace es Fourier, donde $s = i\omega$ sólo complejo.
La transformada de Laplace esta dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t)) = F(s) \\ F_(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \end{aligned}$$

Volvamos a la ecuación 1.1 que relaciona el movimiento del suelo y de la masa del instrumento como

$$\ddot{z} + 2\epsilon\dot{z} + \omega_0^2 z = -\ddot{u}$$

y aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\ddot{z}) + 2\epsilon\mathcal{L}(\dot{z}) + \omega_0^2\mathcal{L}(z) &= -\mathcal{L}(\ddot{u}) \\ s^2Z(s) + 2\epsilon sZ(s) + \omega_0^2 Z(s) &= -s^2U(s) \\ (s^2 + 2\epsilon s + \omega_0^2)Z(s) &= -s^2U(s) \end{aligned}$$

Definimos la "función de transferencia.$^{\text{en}}$ el dominio de Laplace como

$$\begin{aligned} Z(s) &= H(s)U(s) \\ Z(s) &= -\frac{s^2}{s^2 + 2\epsilon s + \omega_0^2}U(s) \end{aligned}$$

la cual nos permite determinar las características de la respuesta del instrumento sin resolver la ecuación diferencial del sistema.
Para obtener los polos del sistemas hacemos el denominador igual a cero:

$$s^2 + 2\epsilon s + \omega_0^2 = 0$$

con soluciones

$$P_{1,2} = \frac{-2\epsilon \pm \sqrt{4\epsilon^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

o

$$P_{1,2} = -\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - \omega_0^2} \tag{2.12}$$

Recordando que $h = \epsilon/\omega_0$ podemos escribir las soluciones en función de h y ω_0 dando:

$$P_{1,2} = (-h \pm i\sqrt{1 - h^2})\omega_0$$

donde generalmente $h < 1$ por lo que son polos complejos.

2.1. Caso general

Para cualquier sistema, se define la función de transferencia que depende de s como

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

Es conveniente factorizar los polinomios en el numerador y denominador, y escribir la función de transferencia en terminos de esos factores:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_{m-1})(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_{n-1})(s - p_n)} \tag{2.13}$$

donde el numerador y denominador tiene coeficientes reales definidos por la ecuación diferencial del sistema y $K = b_m/a_n$ es el factor de ganacia. Como se ha escrito en la ec. 2.13 los z_i son las raíces de la ecuación

$$N(s) = 0$$

y son los ceros del sistema, mientras que los p_i son las raíces de la ecuación

$$D(s) = 0$$

y son los polos del sistema. Todos los coeficinetes de los polinomios $N(s)$ y $D(s)$ son reales, por lo que los polos y ceros deben ser o puramente real o aparecer en pares de complejos conjugados. En general para los polos, son $p_i = \sigma_i$ o sino $p_i, p_{i+1} = \sigma_i \pm i\omega_i$. La existencia de sólo un complejo sin su correspondiente complejo conjugado grenera coeficientes complejos en el polinomio. Similarmente para los ceros.
Entonces z_i, p_i y K definen completamente la ecuación diferencial y proveen la descripción completa del sistema.

■ **Ejemplo**

Un sistema tiene como polos un par conjugado $p_{1,2} = -1 \pm 2i$, un cero real $z_1 = -4$ y un factor de ganancia $K = 3$. Encuentre la ecuación diferencial que representa el sistema.

Solución

La función de transferencia es

$$H(s) = K\frac{(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} H(s) &= 3\frac{s - (-4)}{(s - (-1 - 2i))(s - (-1 + 2i))} \\ &= \frac{3s + 12}{s^2 + s + 2is + s - 2is + 5} \\ &= \frac{3s + 12}{s^2 + 2s + 5} \end{aligned}$$

Luego la ecuación diferencial será

$$(s^2 + 2s + 5)Z(s) = (3s + 12)U(s)$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa obtenemos

$$\ddot{z} + 2\dot{z} + 5z = 3\dot{u} + 12u$$

2.2. El gráfico polos-ceros

Un sistema es caracterizado por sus polos y ceros en el sentido de que ellos permiten la reconstrucción de los input/outputs de la ecuación diferencial. En general, los polos y ceros de una función de transferencia pueden ser complejos, y la dinámica del sistema entonces puede ser representada graficamente graficando sus locaciones sobre el plano s complejo, donde los ejes representan las partes reales e imaginarias de la variable compleja s. Estos gráficos son los llamados gráficos polos-ceros. Es usual marcar la locación de los ceros por un cícrculo y la de los polos por una cruz. La ubicación de estos polos y ceros proveen información cualitativa acerca de la respuesta del sistema.

■ **Ejemplo**

Un sistema tiene la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = K\frac{(s + 2)}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}$$

Graficar los polos y ceros.

Solución

Podemos escribir la función de transferencia en polinomios factorizados como

$$H(s) = K\frac{(s + 2)}{(s + 1)(s + (1 + 2i))(s + (1 - 2i))}$$

donde el cero será

$$z = -2$$

y los polos

$$p_1 = -1 - 2i \qquad \text{y} \qquad p_2 = -1 + 2i$$

La locación de los polos y ceros es mostrada en la Figura 2.4.

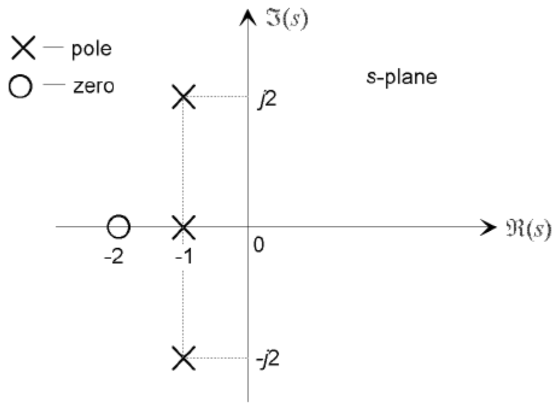

Figura 2.4: Locación polos y ceros del ejemplo.

2.3. Respuesta homogénea

Dado que la función de transferencia representa completamente a la ecuación diferencial de un sistema, sus polos definen directamente las componentes de la respuesta homogénea, es decir, sin fuerzas externas. La ecuación característica de la respuesta homogénea será

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

cuya solución son los polos del sistema. La respuesta general de un sistema sin fuerzas externas esta dada por

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t} \tag{2.14}$$

donde p_i son los polos y C_i son determinados a partir de las condiciones iniciales del problema.
La locación de los polos en ell plano s entonces define las n componentes de la respuesta homogénea como es descrito a continuación:

1. Polo real a la izquierda del eje imaginario, $p_i = -\sigma$, define una componente que decae exponencialmente (Figura 2.5), $Ce^{-\sigma t}$, en la respusta homogénea. La tasa de decaimiento es determinada por la locación del polo, polos más cerca del origen corresponden a decaimientos más lentos.

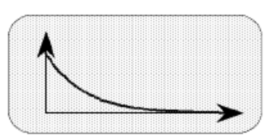

Figura 2.5: Polo real a la izquierda del eje imaginario.

2. Polo en el origen $p_i = 0$ define una componente que es constante en amplitud y definida por las condiciones iniciales (Figura 2.6).

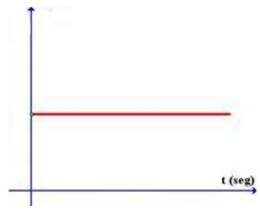

Figura 2.6: Polo en el origen.

3. Polo real a la derecha del eje imaginario corresponde a una componente exponencial creciente (Figura 2.7), $Ce^{\sigma t}$.

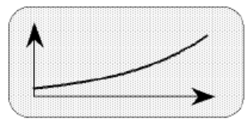

Figura 2.7: Polo real a la dercha del eje imaginario.

4. Un par de polos complejos conjugados a la izquierda del eje imaginario, $-\sigma \pm i\omega$ se combinan para generar una componente sinusoidal decreciente (Figura 2.8) de la forma

$$\begin{aligned} y_h &= C_1 e^{-\sigma t + i\omega t} + C_2 e^{-\sigma t - i\omega t} \\ &= e^{-\sigma t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right) \\ &= e^{-\sigma t}\left[(C_1 + C_2)\cos(\omega t) + i(C_1 - C_2)\sin(\omega t)\right] \\ &= e^{-\sigma t} A \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

donde A y ϕ son determinadas por las condiciones iniciales. La tasa de decaimiento es especificada por σ, mientras que la frecuencia de oscilación es determinada por ω

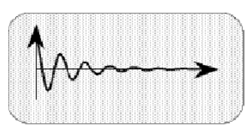

Figura 2.8: Complejos conjugados a la izquierda del eje imaginario.

5. Un par de polos imaginarios (sobre el eje imaginario), $\pm i\omega$, genera una componente oscilatoria con amplitud constante (Figura 2.9) determinada por las condiciones iniciales.
6. Un par complejo a la derecha del eje imaginario genera una componente sinusoidal creciente (Figura 2.10).

El resumen de estos resultados son mostrados en la Figura 2.11

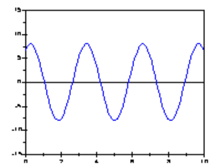

Figura 2.9: Polos puramente imaginarios.

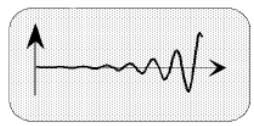

Figura 2.10: Complejos conjugados a la derecha del eje imaginario.

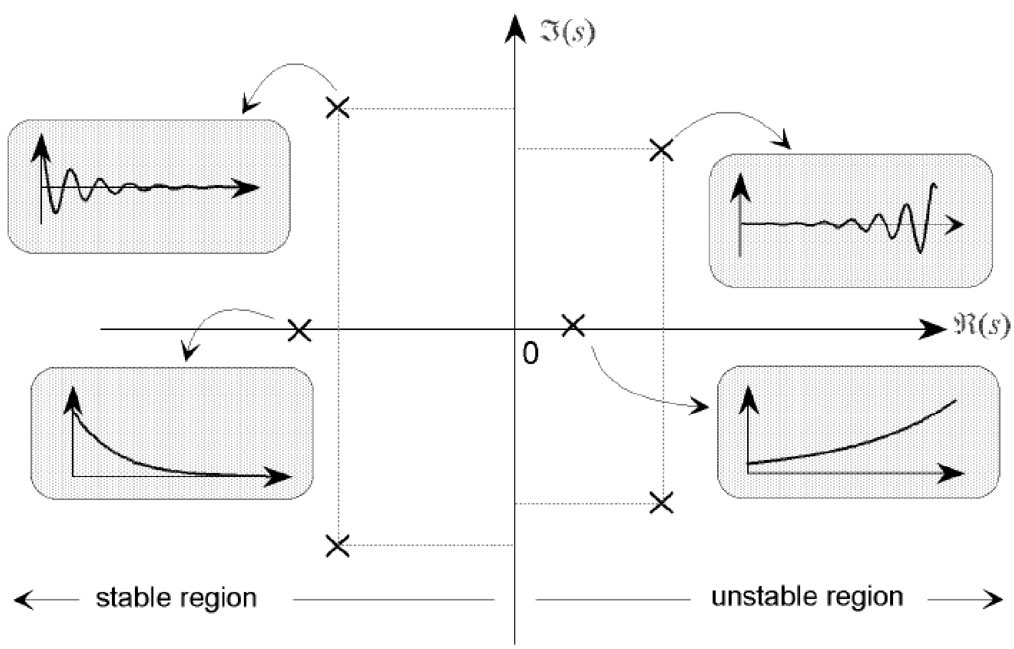

Figura 2.11: Resumen de la locación de polos y ceros.

2.4. Estabilidad

La estabilidad puede ser determinada desde su función de transferencia. Un sistema lineal de orden n es asintóticamente estable si y sólo si todas las componentes en la respuesta homogénea junto con sus condiciones iniciales decae a cero mientras el tiempo pasa, es decir,

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t} = 0 \tag{2.15}$$

Para que sea estable todos sus polos deben tener la parte real negativa, es decir, que esten a la izquierda del eje imaginario en el plano s (Figura 2.11).
Un sistema que tiene uno o más polos sobre el eje imaginario (tiene componente oscilatoria no decayente en la respuesta homogénea) se define como "marginalmente estable".

■ **Ejemplo**

Comente acerca de la forma esperada de la respuesta de un sistema con un gráfico polos-ceros que se muestra en la Figura 2.12 para condiciones iniciales arbitrarias.

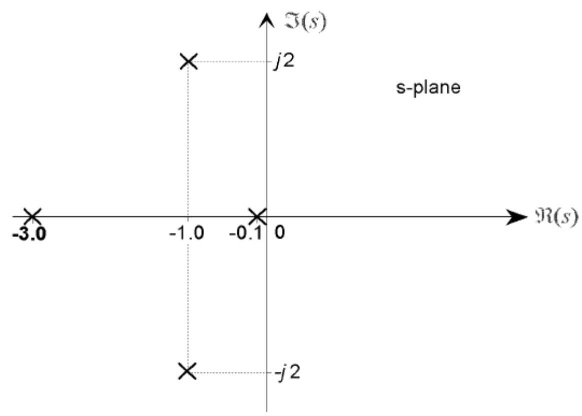

Figura 2.12: Gráfico polos-ceros para un sistema de cuarto orden.

Solución

El sistema tiene 4 polos y ningún cero. Los dos polos reales corresponden a terminos de decaimineto exponencial de la forma C_1e^{-3t} y $C_2e^{-0,1t}$, y el par de polos complejos conjugados introduce una componente oscilatoria que decae exponencialmente de la forma $Ae^{-t}\sin(2t+\phi)$. Por lo tanto, escribimos la respuesta homogénea total como

$$y_h(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{-0,1t} + Ae^{-t}\sin(2t+\phi)$$

A pesar de las magnitudes relativas de estas componentes estan determinadas por el set de condiciones iniciales, podemos hacer las siguientes observaciones generales:

1. El termino e^{-3t}, con una constante de tiempo $\tau = 0{,}33$s, decae rápidamente y es significante (se considera significante cuando el valor de la componente es mayor o igual al 2 % de su amplitud inicial) aproximadamente en $t = 1{,}33$s que corresponde a 4τ.

2. La respuesta tiene una componente oscilatoria $Ae^{-t}\sin(2t+\phi)$ definida por el par complejo conjugado. La constante de tiempo para esta componente será $tau = 1$s. La oscilación decaerá a su límite de significancia en aproximadamente 4s que corresponde a 4τ.
3. El termino $e^{-0,1t}$, con una constante de tiempo $\tau = 10$s, persiste por aproximadamente 40s (4τ). Y este termino es por lo tanto el termino dominante en la respuesta homogénea total del sistema.