

5. Teoría de rayos

La teoría de rayos en sismología es análoga a la teoría de rayos usada en la óptica. Tiene numerosas aplicaciones tales como algoritmos para localizar terremotos, determinación del mecanismo focal con ondas de cuerpo e inversiones para la estructura de velocidades en la corteza y manto.

La teoría de rayos es intuitivamente fácil de entender, simple de trabajar y muy eficiente. Pero también tiene importantes limitaciones: es una aproximación de alta frecuencia, la cual podría fallar a largos periodos o grandes gradientes de velocidad y no predice fácilmente cualquier efecto “no-geométrico”, tales como ondas difractadas.

5.1. Ley de Snell

Consideremos una onda plana que se propaga en un material con velocidad uniforme v (Figura 5.1) intersectando una interfase horizontal.

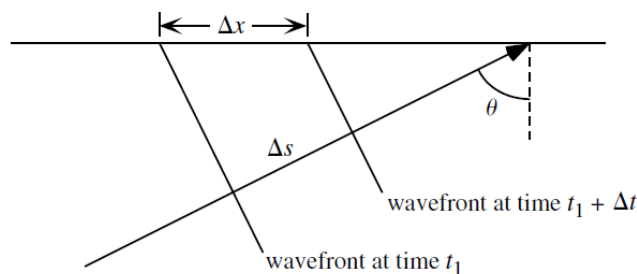


Figura 5.1: Onda incidente en una superficie horizontal.

Los frentes de onda en el tiempo t y en el tiempo $t + \Delta t$ están separados por una distancia Δs a lo largo de la trayectoria del rayo. El ángulo desde la vertical θ se llama ángulo de incidencia. Este ángulo relaciona Δs a la separación en la interfase Δx .

$$\Delta s = \Delta x \sin \theta$$

Dado que $\Delta s = v\Delta t$, tenemos

$$v\Delta t = \Delta x \sin \theta$$

o

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\sin \theta}{v} = u \sin \theta \equiv p$$

con u lentitud y p parámetro de rayo, el cual es constante para cada rayo.

Si la interfase representa la superficie libre, entonces midiendo el tiempo de llegada del frente de onda en dos estaciones se puede medir directamente el parámetro p . Este parámetro representa la lentitud aparente del frente de onda en la dirección horizontal, por lo que a veces es llamado lentitud horizontal.

Consideremos una onda plana que pasa por una interfase entre dos capas homogéneas de diferente velocidad (Figura 5.2).

El parámetro p puede ser expresado en términos de la lentitud y ángulo con la vertical en cada capa:

Para la capa con velocidad v_1

$$\begin{aligned} \Delta s_1 &= \Delta x_1 \sin \theta_1 \\ v_1 \Delta t &= \Delta x_1 \sin \theta_1 \\ \frac{\Delta t}{\Delta x_1} &= \frac{\sin \theta_1}{v_1} = p \end{aligned}$$

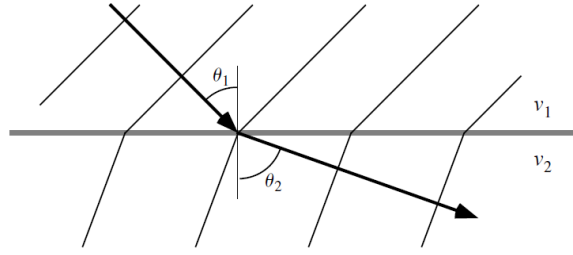


Figura 5.2: Onda plana cruzando una interfase horizontal.

Para la capa con velocidad v_2

$$\begin{aligned} \Delta s_2 &= \Delta x_2 \sin \theta_1 \\ v_2 \Delta t &= \Delta x_2 \sin \theta_2 \\ \frac{\Delta t}{\Delta x_2} &= \frac{\sin \theta_2}{v_2} = p \end{aligned}$$

Combinando lo anterior

$$p = u_1 \sin \theta_1 = u_2 \sin \theta_2 \quad (5.1)$$

Esto nos indica que es el mismo rayo el cual cambia su trayectoria al pasar de un medio a otro.

5.2. Rayos para modelos lateralmente homogéneos

En la mayoría de los casos, las velocidades compresionales y transversales aumentan en función de la profundidad de la Tierra. Supongamos que examinamos un rayo viajando hacia el centro de la Tierra a través de una serie de capas, cada una más rápida que la anterior (ver Figura 5.3).

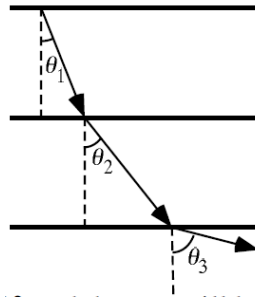


Figura 5.3: Velocidades variando con la profundidad.

El parámetro de rayo p permanece constante. Entonces

$$p = u_1 \sin \theta_1 = u_2 \sin \theta_2 = u_3 \sin \theta_3$$

Si la velocidad continúa aumentando, θ eventualmente llegará a 90° y el rayo viajará horizontalmente. Esto es válido también al considerar gradientes de velocidades continuo (Figura 5.4)

Sea la lentitud en la superficie u_0 y su ángulo θ_0 entonces

$$u_0 \sin \theta_0 = p = u \sin \theta$$

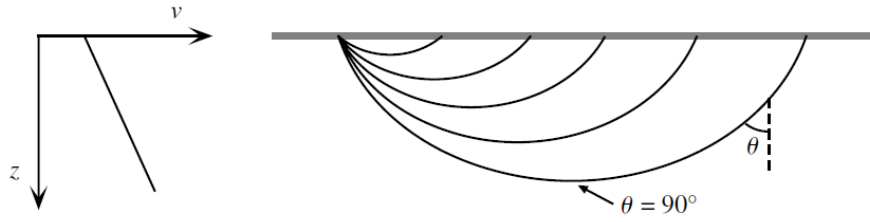


Figura 5.4: Gradientes de velocidad continuo.

Cuando $\theta = 90^\circ$ decimos que el rayo está en su “punto de retorno” y $p = u_{TP}$ donde U_{TP} es la lentitud en el punto de retorno.

Dado que generalmente la velocidad aumenta con la profundidad en la Tierra, la lentitud decrece con la profundidad. En estos ejemplo con capas horizontales o gradientes de velocidades verticales, p permanece constante a lo largo de la trayectoria del rayo. Si los gradientes son laterales, es decir, $v = v(x, y, z)$ entonces p cambiará.

En el modelo en que la velocidad aumenta con la profundidad, la curva de tiempo de viaje, la cual es el gráfico del tiempo de llegada versus la distancia, vemos que p varía a lo largo de la curva (Figura 5.5)

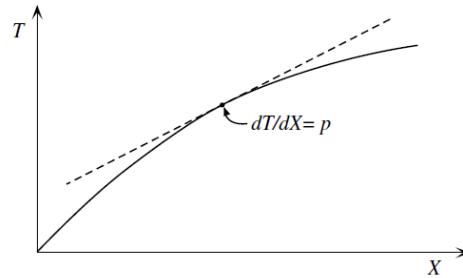


Figura 5.5: Curva de tiempo de viaje.

Notemos que al variar p a lo largo de la curva de viaje, vemos que diferentes p son responsables de la llegada de los rayos a cada distancia. En cualquier punto a lo largo de un rayo, el vector lentitud \vec{s} puede ser escrito por sus componentes horizontal y vertical como lo muestra la Figura 5.6.

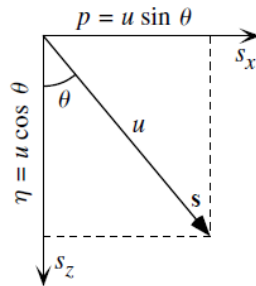


Figura 5.6: Componentes horizontal y vertical del vector \vec{s} .

El largo de \vec{s} es u , la componente horizontal, s_x es el parámetro de rayo p . De manera análoga, definimos la

lentitud vertical η como

$$\eta = u \cos \theta = \sqrt{u^2 - p^2}$$

En el punto de retorno $p = u$ y $\eta = 0$.

Para calcular el tiempo de viaje y la distancia para un rayo en particular, consideremos un segmento de largo ds a lo largo de la trayectoria, como lo muestra la Figura 5.7.

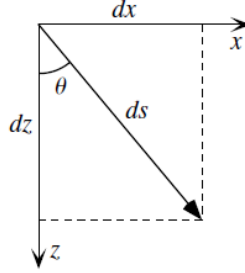


Figura 5.7: Segmento de largo ds .

De la geometría vemos

$$\frac{dz}{dx} = \sin \theta; \quad \frac{dz}{ds} = \cos \theta = (1 - \sin^2 \theta)^{1/2}$$

Dado que $p = u \sin \theta$ escribimos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{p}{u} \\ \frac{dz}{ds} &= \left(1 - \frac{p^2}{u^2}\right)^{1/2} = u^{-1} \sqrt{u^2 - p^2} \end{aligned}$$

De la regla de la cadena,

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dz} = \frac{p}{u} \frac{u}{\sqrt{u^2 - p^2}}$$

Para obtener x ,

$$x(z_1, z_2, p) = p \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}}$$

Sea z_1 la superficie libre ($z_1 = 0$) y z_2 el punto de retorno (z_p), la distancia x desde una fuente superficial al punto de retorno:

$$x(p) = p \int_0^{z_p} \frac{dz}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}} \quad (5.2)$$

dado que el rayo es simétrico con respecto al punto de retorno, la distancia total $X(p)$ desde la fuente puntual a su receptor es dos veces la expresión anterior:

$$X(p) = 2p \int_0^{z_p} \frac{dz}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}} \quad (5.3)$$

De manera similar para el tiempo, se tiene

$$\begin{aligned} dt &= u ds \Rightarrow \frac{dt}{ds} = u \\ \frac{dt}{dz} &= \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dz} = u \frac{u}{\sqrt{u^2 - p^2}} = \frac{u^2(z)}{\sqrt{u^2(z) - p^2}} \end{aligned}$$

Integrando,

$$t(p) = p \int_0^{z_p} \frac{u^2(z)}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}} dz \quad (5.4)$$

Esto nos da el tiempo que tarda en llegar al punto de retorno. El tiempo total de una fuente superficial al receptor será:

$$T(p) = 2 \int_0^{z_p} \frac{u^2(z)}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}} dz \quad (5.5)$$

Las ecuaciones 5.3 y 5.5 están hechas para modelos con la lentitud una función continua en la profundidad. El modelo más simple es considerar capas homogéneas (es decir, discretizadas) como se muestra en la Figura 5.8.

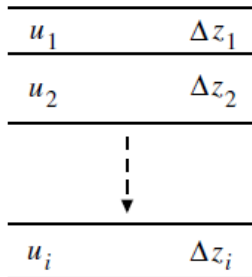


Figura 5.8: Capas homogéneas.

Las integrales 5.3 y 5.5 pasan entonces a sumas:

$$X(p) = 2p \sum_i \frac{\Delta z_i}{(u_i^2(z) - p^2)^{1/2}} \quad (5.6)$$

$$T(p) = 2 \sum_i \frac{u_i^2(z) \Delta z_i}{(u_i^2(z) - p^2)^{1/2}} \quad (5.7)$$

Ejemplo 1

Consideremos un modelo de tres capas homogéneas de 3 km de espesor cada una y con velocidades 4, 6 y 8 km/s de la superior a la inferior. ¿Cuál es la distancia fuente superficial - receptor y el tiempo para un rayo con $p = 0,15\text{s/km}$?

Solución

Primero calculamos las lentitudes para cada capa:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1/v_1 = 0,25(\text{s/km}) \\ u_2 &= 1/v_2 = 0,167(\text{s/km}) \\ u_3 &= 1/v_3 = 0,125(\text{s/km}) \end{aligned}$$

Además notamos que $\Delta z_1 = \Delta z_2 = \Delta z_3 = 3\text{km}$.

Luego comparamos las lentitudes con el parámetro p para ver en qué capa retornará el rayo, es decir, en qué capas $u < p$:

$$u_1 < p; \quad u_2 < p; \quad u_3 > p$$

Esto sugiere que el rayo pasará a través de las capas 1 y 2, pero será reflejada en la interfase entre las capas 2 y 3. Luego,

$$\begin{aligned} X(p) &= 2p \frac{\Delta z_1}{(u_1^2(z) - p^2)^{1/2}} + 2p \frac{\Delta z_2}{(u_2^2(z) - p^2)^{1/2}} \\ &= \frac{2 \cdot 0,15 \cdot 3}{(0,25^2 - 0,15^2)^{1/2}} + \frac{2 \cdot 0,15 \cdot 3}{(0,167^2 - 0,15^2)^{1/2}} \\ &= 16,9 \text{ km} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T(p) &= 2 \frac{u_1^2 \Delta z_1}{(u_1^2(z) - p^2)^{1/2}} + 2 \frac{u_2^2 \Delta z_2}{(u_2^2(z) - p^2)^{1/2}} \\ &= \frac{2 \cdot 0,25^2 \cdot 3}{(0,25^2 - 0,15^2)^{1/2}} + \frac{2 \cdot 0,167^2 \cdot 3}{(0,167^2 - 0,15^2)^{1/2}} \\ &= 4,17 \text{ s} \end{aligned}$$

El rayo viaja durante 4.17 s y recorre 16.9 km para alcanzar la fuente.

Ejemplo 2

Cuando hay gradientes de velocidad, las ecuaciones en suma (5.7 y 5.7) no resultan convincentes, ya que debiera usarse un gran número de capas homogéneas para dar resultados más precisos.

La mejor estrategia es parametrizar el modelo de velocidades a un número de puntos discretos en profundidad y evaluar las integrales 5.3 y 5.5, asumiendo una interpolación adecuada entre los puntos.

Para un gradiente de velocidad lineal entre los puntos de la forma

$$v(z) = a + b(z)$$

con

$$b = \frac{v_2 - v_1}{z_2 - z_1}$$

. Evaluamos la integral 5.3:

$$\begin{aligned} X(p) &= 2p \int_0^{z_p} \frac{dz}{(u^2 - p^2)^{1/2}} \\ &= 2p \int_0^{z_p} \frac{dz}{u(1 - p^2/u^2)^{1/2}} \\ &= 2p \int_0^{z_p} \frac{vdz}{(1 - v^2p^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

donde hemos usado $u = 1/v$. Haciendo $v = a + bz$ entonces $dv = b dz$ y además los límites de integración cambian como a $v_1 = a \Rightarrow z = 0$ y $v_2 = v_p \Rightarrow z = z_p$, su punto de retorno. Luego,

$$X(p) = \frac{2p}{b} \int_{v_1}^{v_2} \frac{v dv}{(1 - v^2 p^2)^{1/2}}$$

Para realizar la intergración hacemos un nuevo cambio de variables, $k = 1 - v^2 p^2$ con $dk = -2p^2 v dv$ y sus límites de integración cambian como $k_1 = 1 - a^2 p^2$ y $k_2 = 1 - v_p^2 p^2$. Así

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{2p}{b} \int_{k_1}^{k_2} \frac{-v dk}{2p^2 v \sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{bp} \int_{k_2}^{k_1} \frac{dk}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{bp} 2\sqrt{k} \Big|_{k_2}^{k_1} \end{aligned}$$

Reescribiendolo en las coordenadas originales, pasando primero a v y luego a u tenemos

$$\begin{aligned}
 X(p) &= \frac{1}{bp} 2\sqrt{1-v^2p^2} \Big|_{v_2}^{v_1} \\
 &= \frac{2}{bp} v \sqrt{1/v^2 - p^2} \Big|_{v_2}^{v_1} \\
 &= \frac{2}{bpu} \sqrt{u^2 - p^2} \Big|_{u_2}^{u_1} \\
 X(p) &= \frac{2\eta}{bpu} \Big|_{u_2}^{u_1}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Análogamente se llega a

$$T(p) = \frac{2}{b} \left[\ln \left(\frac{u + \eta}{p} \right) - \frac{\eta}{u} \right] \Big|_{u_2}^{u_1} + 2px(p) \tag{5.9}$$

5.3. Curvas de tiempo de viaje y tiempo de retardo

En general, $X(p)$ se incrementa cuando p disminuye, esto significa que el ángulo θ decrece. En la Figura 5.9 vemos que en este caso $dX/dp < 0$. Cuando pasa esto, decimos que esta parte de la curva de tiempo de viaje es **prógrado**.

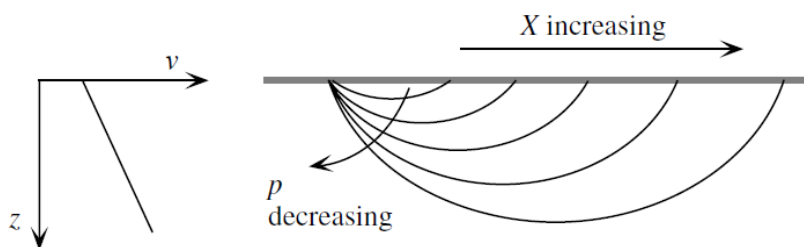


Figura 5.9: Distancia aumentando.

Ocasionalmente, cuando hay una rápida transición de velocidades en la Tierra, se tiene $dX/dp > 0$ (Figura 5.10). En este caso, se llama **retrógrado**.

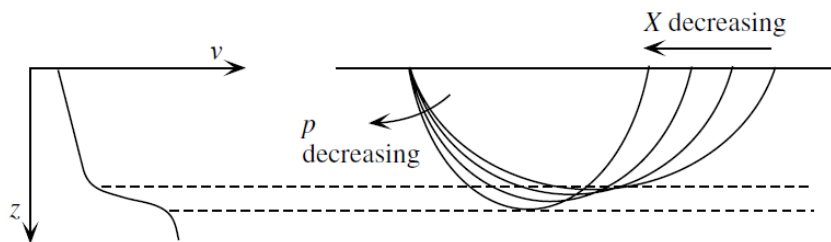


Figura 5.10: Distancia disminuyendo.

La transición de prógrado a retrógrado y volver a prógrado genera una triplicación en la curva de tiempo de viaje (Figura 5.11).

Los puntos donde cambia de dirección se llaman **caústicos**. Estos son los puntos donde $dX/dp = 0$.

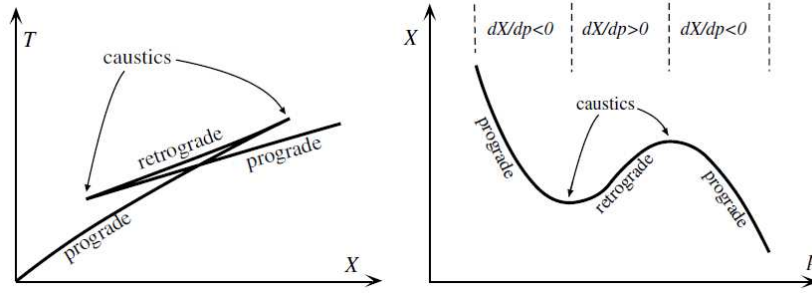


Figura 5.11: Triplicaciones en el curva de tiempo de viaje.

A mayores valores de p , los rayos se curvan a profundidades más someras y viajan sólo distancias pequeñas. A medida de que el parámetro de rayo decrece, la profundidad del punto de retorno aumenta y el rango X aumenta.

5.4. La función $\tau(p)$

La función $X(p)$ se comporta mejor que $T(x)$ ya que esta última es multivaluada (hay más de un valor de T para cada p , a diferencia de que hay un sólo valor de X para cada valor de p), pero la función inversa $p(X)$ es también multivaluada.

Una función mejor, es la combinación

$$\tau(p) = T(p) - pX(p) \quad (5.10)$$

$\tau(p)$ representa el “tiempo de retardo” y está dado por el intercepto de la tangente a la curva de viaje (Figura 5.12).

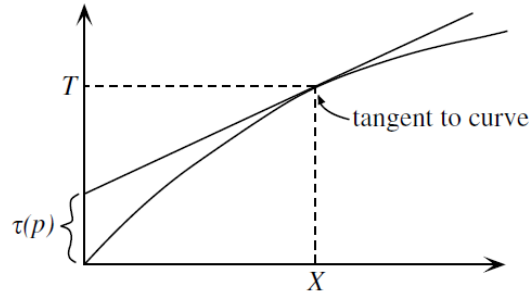


Figura 5.12: Tiempo de retardo.

$\tau(p)$ se calcula de una manera simple usando 5.3 y 5.5:

$$\begin{aligned} \tau(p) &= 2 \int_0^{z_p} \left[\frac{u^2}{\sqrt{u^2 - p^2}} - \frac{p^2}{\sqrt{u^2 - p^2}} \right] dz \\ \tau(p) &= 2 \int_0^{z_p} \frac{u^2 - p^2}{\sqrt{u^2 - p^2}} dz \\ \tau(p) &= 2 \int_0^{z_p} \eta dz \end{aligned} \quad (5.11)$$

Para un medio simple de capas

$$\tau(p) = 2 \sum_i \sqrt{u_i^2 + p^2} \Delta z_i = 2 \sum_i \eta_i \Delta z_i$$

Consideremos un punto sobre la curva de tiempo de viaje es

$$t = T + p(x - X)$$

En $x = 0$, $t = T - pX = \tau(p)$ el cual es el intercepto de la línea, mientras que la pendiente es p .

La pendiente para la curva τ versus p es

$$\frac{d\tau}{dp} = \frac{d}{dp} \left\{ 2 \int_0^{z_p} \sqrt{u^2 - p^2} dz \right\} = -2p \int_0^{z_p} \frac{dz}{\sqrt{u^2 - p^2}}$$

y así

$$\frac{d\tau}{dp} = -X(p)$$

La pendiente de la curva $\tau(p)$ es $-X$. Dado que $X \geq 0$, la curva $\tau(p)$ debe decrecer. Esta curva decrece incluso en presencia de una triplicación en la curva $T(p)$. La segunda derivada

$$\frac{d^2\tau}{dp^2} = \frac{d}{dp}(-X) = -\frac{dX}{dp}$$

La curva $\tau(p)$ es cóncava hacia arriba para partes prógradas y cóncava hacia abajo en lo retrógrado. Las funciones $X(p)$, $T(p)$ y $\tau(p)$ son propias ya que son univaluadas. Por el contrario, la función $T(x)$ no es propia, ya que es multivaluada, como lo muestra la Figura 5.13.

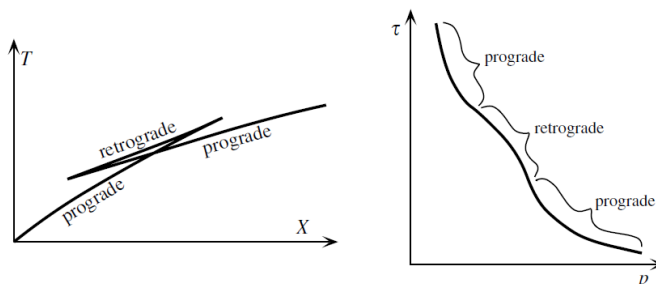


Figura 5.13: Función no propia y función propia.

5.5. Zonas de baja velocidad (LVZ)

Anteriormente vimos que la velocidad siempre aumenta con la profundidad. Sin embargo, nos encontramos con zonas en las que decrece la velocidad con la profundidad creando zonas de baja velocidad (Low Velocity Zone LVZ). El ejemplo más claro es el núcleo terrestre, en el cual las ondas P caen desde ~ 14 km/s a 8 km/s. También hay evidencia de una LVZ en el manto superior. En la zona donde el gradiente es negativo, los rayos se doblan hacia abajo, como lo muestra la Figura 5.14. Notemos que ningún rayo originado en la superficie puede retornar en la LVZ. Solamente rayos con parámetro de rayo muy bajo (es decir, prácticamente perpendicular a la capa) entran a la LVZ. La existencia de la LVZ crea un gap llamado “zona de sombra” en las curvas $T(x)$ y $\tau(p)$.

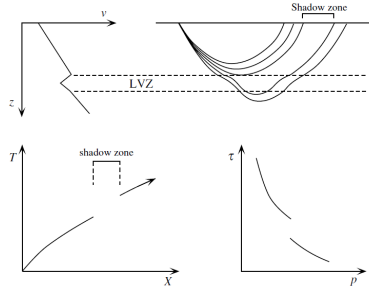


Figura 5.14: Zonas de sombra producto de una capa de baja velocidad.

5.6. Rayos en Tierra esférica

La teoría de rayos anteriormente descrita es acerca de una Tierra de capas horizontales. Ésta es adecuada para modelar llegadas de ondas en la corteza por sobre los 30 km. Sin embargo, para rayos más profundos es necesario tomar en cuenta la Tierra como esfera. Hay dos métodos para hacer esto: (1) cambiando la definición del parámetro de rayo usando geometría esférica; y (2) aplicar una transformación (llamada transformación de Tierra plana) al modelo esférico para permitir el uso directo de las ecuaciones de Tierra plana.

En el primer método modificamos la definición del parámetro de rayo considerando que el ángulo de cada rayo con respecto al radio de la Tierra (vertical local) cambia a lo largo de la trayectoria.

Consideremos dos cascarones esféricos en una Tierra esféricamente simétrica, como lo muestra la Figura 5.15.

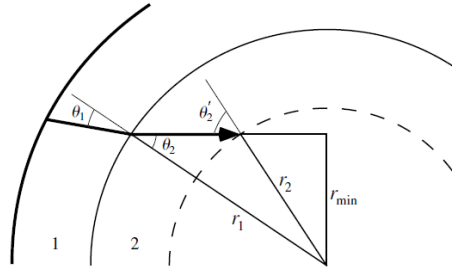


Figura 5.15: Teoría de rayos para Tierra esférica.

En la interfase del cascarón 1 y 2 tenemos la ley de Snell,

$$u_1 \sin \theta_1(r_1) = u_2 \sin \theta_2(r_1) \quad (5.12)$$

donde la nomenclatura de usar el ángulo con respecto a r_1 significa que el ángulo es tomado con la vertical local hecha con el radio r_1 .

Como el rayo viaja através del cascarón 2, notamos que el ángulo de incidencia cambia, ya que cambia su vertical local es ahora con respecto a r_2 , lo que implica que $\theta_2(r_1) \neq \theta_2(r_2)$.

Consideremos el r_{min} como el radio perpendicular a la continuación del rayo del cascarón 2 que se muestra en la Figura 5.15 o en más detalle en la Figura 5.16. Este punto será el punto de retorno del rayo. Usando geometría vemos que

$$r_1 \sin \theta_2(r_1) = r_{min}$$

Análogamente,

$$r_2 \sin \theta_2(r_2) = r_{min}$$

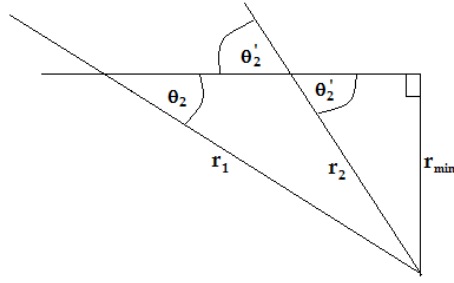


Figura 5.16: r_{min} .

Igualando,

$$\begin{aligned} r_1 \sin \theta_2(r_1) &= r_2 \sin \theta_2(r_2) \\ \sin \theta_2(r_1) &= \frac{r_2}{r_1} \sin \theta_2(r_2) \end{aligned}$$

Sustituyendo esta última ecuación en 5.12

$$\begin{aligned} u_1 \sin \theta_1(r_1) &= u_2 \frac{r_2}{r_1} \sin \theta_2(r_2) \\ r_1 u_1 \sin \theta_1(r_1) &= r_2 u_2 \sin \theta_2(r_2) \end{aligned}$$

Luego tenemos que el parámetro de rayo es

$$p_{sph} = ru \sin \theta \quad (5.13)$$

donde no hemos escrito expresamente que es con respecto a su vertical local, pero con respecto a ella se calcula.

Recordando, en el caso de Tierra plana, el parámetro de rayo es la medida de la lentitud horizontal,

$$p_{flat} = p_f = u \sin \theta = \frac{dT}{dX}$$

En la Tierra esférica, $dX = d\Delta r$ (arco de esfera), con Δ el ángulo en radianes. Luego

$$p_{sph} = r(u \sin \theta) = r \left(\frac{dT}{dX} \right) = \frac{dT}{d\Delta}$$

Notemos que p_{sph} tiene unidades de tiempo, (s/rad), mientras que p_f de lentitud (s/km).

Expresiones para tiempo de viaje y distancia en función de p_{sph} son similares,

$$\begin{aligned} T(p_{sph}) &= 2 \int_{r_{tp}}^{r_e} \frac{(ur)^2}{[(ur)^2 - p_{sph}^2]^{1/2}} \frac{dr}{r} \\ \Delta(p_{sph}) &= 2p_{sph} \int_{r_{tp}}^{r_e} \frac{1}{[(ur)^2 - p_{sph}^2]^{1/2}} \frac{dr}{r} \end{aligned}$$

con r_e el radio de la Tierra y el punto de retorno es el r_{min} .