

# 7 Electromagnetismo e inducción



- Aubert, J., Aurnou, J. and Wicht, J., (2008). *The magnetic structure of convection-driven numerical dynamos. Geophys. J. Int.*, 172, pp 945-956.

# 7.1 Introducción

- En las clases previas hemos visto:
  1. En núcleo externo de la Tierra consiste mayormente de hierro en una fase líquida.
  2. La mayoría del campo geomagnético se origina en el núcleo.
  3. Este campo magnético cambia en escalas de tiempo de 1 año hasta  $1 \times 10^8$  años.
- Es probable que es el movimiento de un conductor líquido dentro del núcleo que genera el campo y causa sus variaciones en el tiempo.
- Para investigar el detalle de esto, debemos entender los principios de electromagnetismo.

## 7.2.1 Cantidades físicas

- La descripción matemática de electromagnetismo se mide en términos de cantidades macroscópicas, continuas y físicas medidas en unidades SI
  1.  $\mathbf{B}(r, \theta, \phi, t)$  La densidad del flujo magnético (siempre llamado campo magnético) en Tesla (T). Una carga de 1 Culombio, moviendo perpendicular a un campo magnético de 1 Tesla a una velocidad de  $1 \text{ ms}^{-1}$ , siente una fuerza de 1 N.
  2.  $\mathbf{E}(r, \theta, \phi, t)$  El campo eléctrico en Voltios por metro ( $\text{Vm}^{-1}$ ).
  3.  $\mathbf{J}(r, \theta, \phi, t)$  La densidad de corriente eléctrica en Amperios por metro cuadrado ( $\text{Am}^{-2}$ ).
  4.  $\rho_e(r, \theta, \phi, t)$  La densidad de carga eléctrica en Culombios por metro cubico ( $\text{Cm}^{-3}$ ).
- Se supone que estos campos varían suavemente en el espacio y que las partículas individuales (efectos cuánticos) están ignorados. Esta es una buena aproximación para un cuerpo el tamaño del núcleo.

## 7.2.2 Las ecuaciones de Maxwell

1. La ley de Gauss:  $\mathbf{E}$  producido por una densidad de carga.
2.  $\mathbf{B}$  es solenoidal, no existen monopolos magnéticos entonces líneas del campo magnético nunca terminan. El mismo número de líneas que entran un volumen tienen que salir del volumen.
3. La ley de inducción de Faraday:  $\mathbf{E}$  inducido por variaciones temporales en  $\mathbf{B}$ .
4. La ley de Ampere-Maxwell:  $\mathbf{B}$  producido por corrientes o por variaciones temporales en  $\mathbf{E}$ .

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (\text{M1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{M2})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{M3})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{M4})$$

$\epsilon_0$  = permitividad eléctrica de un vacío =  $8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$

$\mu_0$  = permeabilidad magnética de un vacío =  $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$

$(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$

## 7.2.3 La corriente de desplazamiento

- La corriente de desplazamiento es la variación temporal de  $\mathbf{E}$  en la ley de Ampere-Maxwell.
- Considere la magnitud relativa de los términos que involucran  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  en la ley de Ampere-Maxwell.

$$\frac{|\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}|}{|\nabla \times \mathbf{B}|} \sim \frac{\epsilon_0 \mu_0 \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{T}}}{\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{L}}}$$

- Usando un análisis similar a los términos en la ley de Faraday, tenemos  $|\nabla \times \mathbf{E}| \sim |-\partial \mathbf{B} / \partial t|$ , para que  $\mathcal{E} / \mathcal{L} \sim \mathcal{B} / \mathcal{T}$  y entonces

$$\frac{|\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}|}{|\nabla \times \mathbf{B}|} \sim \frac{1}{c^2} \frac{\mathcal{L}^2}{\mathcal{T}^2}$$

## 7.2.3 La corriente de desplazamiento

- $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{T}$  son las escalas características de longitud y tiempo asociadas con los cambios en el campo electromagnético que queremos estudiar. Para el núcleo de la Tierra, la escala de longitud mas grande es  $\sim 3481$  km y la escala de tiempo menor es  $\sim 1$  año.

$$\frac{|\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}|}{|\nabla \times \mathbf{B}|} \sim \frac{1}{c^2} \frac{\mathcal{L}^2}{\mathcal{T}^2} \sim \left( \frac{0.1 \text{ms}^{-1}}{3 \times 10^8 \text{ms}^{-1}} \right)^2 \sim 10^{-20}$$

- Entonces, para los procesos en el núcleo podemos despreciar el término que incluye la corriente de desplazamiento. En este caso, la ley de Ampere-Maxwell reduce a  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ .
- Este se conoce como la aproximación magnetohidrodinámica (MHD) de electrodinámica. Con la aproximación MHD, podemos entonces investigar la evolución del campo magnético y corrientes eléctricas en el núcleo.

## 7.2.4 La ley de Ohm

- La ley de Ohm es una ley empírica que define la relación, observada experimentalmente, entre el campo eléctrico y la densidad de corriente eléctrica.
- Para conductores estacionarios, esta ley toma la forma:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

- Cuando consideremos un conductor que mueve a un campo de velocidades  $\mathbf{u}$ , esta ley se modifica a:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

- Aquí,  $\sigma$  es la conductividad eléctrica ( $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ). Para el núcleo de la Tierra, que es predominantemente hierro líquido a alta P, T, la conductividad eléctrica, estimada, es bastante grande ( $\sigma \sim 0.5 \times 10^6 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ).

## 7.3.1 La ecuación de inducción magnética

- Usando las ecuaciones que gobiernan electrodinámica con la aproximación MHD:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3)$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (4)$$

- Combinamos (3) y (4)

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (5)$$

- Tomamos el rotor de (5), y definimos la difusividad magnética  $\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$

$$\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (6)$$



## 7.3.1 La ecuación de inducción magnética

- Ahora, sustituyendo de (2) a (6) y ordenando

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) \quad (7)$$

- Si  $\eta$  es constante, podemos usar una identidad estándar de cálculo vectorial junto con (1) para reescribir el último término en (7) como:

$$\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) = \eta (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})) = \eta (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}) = -\eta \nabla^2 \mathbf{B}$$

- Sustituyendo esto en (7), llegamos a la ecuación de inducción magnética:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (8)$$

- Entonces, con la aproximación MHD, si sabemos el movimiento del conductor  $\mathbf{u}$  y el campo magnético actual, podemos calcular como evoluciona el campo en el tiempo.

- Esta ecuación describe la electrodinámica del núcleo Terrestre.

## 7.3.2 El número de Reynolds magnético

- Empezamos con la ecuación de inducción magnética (8):
  1. Suponemos que el campo de velocidades tiene una magnitud característica  $\mathcal{U}$ .
  2. Suponemos que el campo magnético tiene una magnitud característica  $\mathcal{B}$ .
  3. Suponemos que la longitud sobre la cual cambian estos campos tiene una magnitud característica  $\mathcal{L}$ .
- Entonces, la razón de las magnitudes de los términos en el lado derecho de la ecuación (8) es:

$$\frac{|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|}{|\eta \nabla^2 \mathbf{B}|} \sim \frac{\mathcal{U}\mathcal{B}/\mathcal{L}}{\eta\mathcal{B}/\mathcal{L}^2} \sim \frac{\mathcal{U}\mathcal{L}}{\eta} = R_m$$

- $R_m$  es conocido como el número de Reynolds magnético.
- Para movimientos globales en el núcleo de la Tierra:

$$R_m = \frac{\mathcal{U}\mathcal{L}}{\eta} = \mathcal{U}\mathcal{L}\sigma\mu_0 \sim 3 \times 10^{-4} \cdot 3.481 \times 10^6 \cdot 0.5 \times 10^6 \cdot 4\pi \times 10^{-7} \sim 650$$

## 7.3.3 La conductividad perfecta: flujo congelado

- Considere el caso en que  $R_m \rightarrow \infty$ , para que el segundo término del lado derecho de la ecuación (8) es insignificante (es decir, conductividad perfecta), entonces

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (9)$$

- Usando (M1),  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , y considerando un fluido incompresible,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , podemos escribir una relación estándar del cálculo vectorial

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

- Entonces

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}}_{\text{Advección del campo a lo largo del flujo}} = \underbrace{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}}_{\text{Estiramiento del campo por cizalle del flujo}} \quad (10)$$

## 7.3.3 La conductividad perfecta: flujo congelado

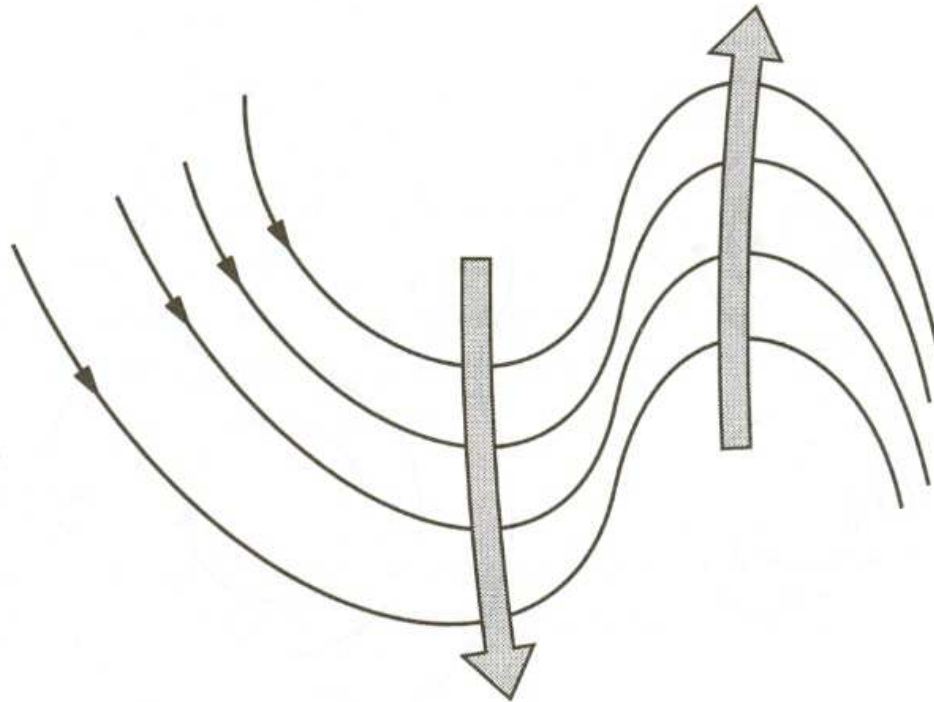
- Considere un elemento de línea  $d\mathbf{l}$  dibujado dentro de un fluido a un cierto tiempo.
- Posteriormente, el elemento de línea se mueve con el fluido, para que la tasa de cambio de  $d\mathbf{l}$  es  $\mathbf{u}(\mathbf{r} + d\mathbf{l}) - \mathbf{u}(\mathbf{r})$  donde  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r} + d\mathbf{l}$  son los vectores de posición de los extremos de  $d\mathbf{l}$ . La ecuación para la evolución temporal de  $d\mathbf{l}$  entonces es:

$$\frac{\Delta(d\mathbf{l})}{\Delta t} = \mathbf{u}(\mathbf{r} + d\mathbf{l}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) = (d\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{u}$$

- Esta ecuación es idéntica al término para el estiramiento del campo por cizalle del flujo en la ecuación (10). Entonces cuando  $R_m \rightarrow \infty$ , el campo magnético cambia exactamente como un elemento de línea, moviéndose con el fluido.
- El campo magnético entonces parece congelado en el fluido. Es decir, las líneas del campo que pasan por un elemento del fluido a un cierto tiempo siguen con el mismo elemento a tiempos posteriores.
- El límite  $R_m \rightarrow \infty$  siempre se llama la aproximación del flujo congelado.

## 7.3.3 La conductividad perfecta: flujo congelado

- En la aproximación del flujo congelado, esquemáticamente imaginamos el flujo llevando el campo magnético con él, moviéndolo y estirándolo.



## 7.3.4 La difusión magnética

- Ahora consideremos el otro límite en la ecuación (8), cuando  $R_m \rightarrow 0$ , entonces el primer término del lado derecho es insignificante (es decir, no hay flujo), entonces

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B}$$

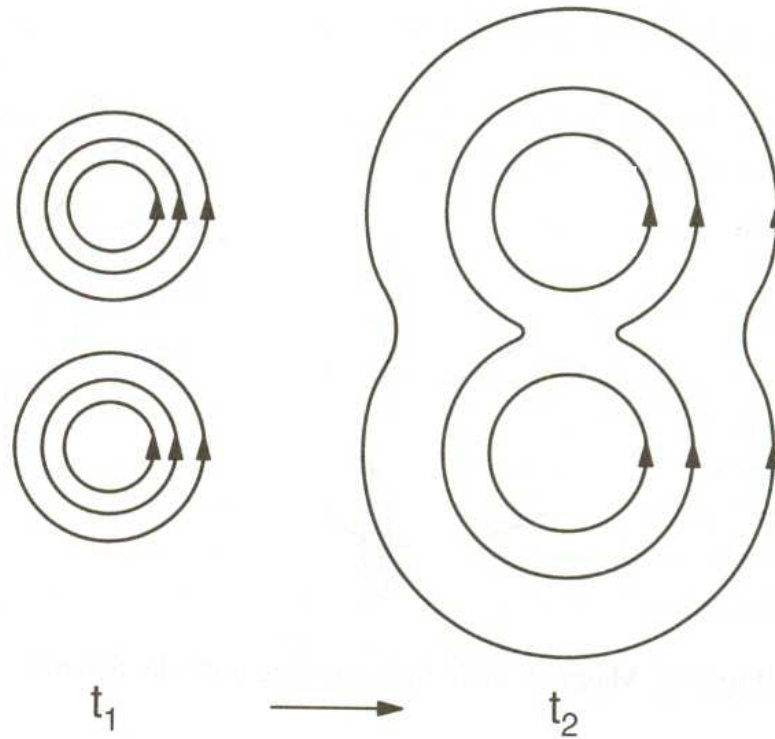
- Este es la ecuación de difusión. Un análisis dimensional nos da

$$\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{T}_D} \sim \frac{\eta \mathcal{B}}{\mathcal{L}^2} \quad \text{entonces} \quad \mathcal{T}_D \sim \frac{\mathcal{L}^2}{\eta}$$

- Entonces los rasgos del campo magnético con mas grandes pendientes espaciales (menor  $\mathcal{L}$ ) difunden mas rápidamente para una cierta difusividad magnética  $\eta$ .
- Debido a este efecto, el campo magnético terrestre decaerá rápidamente si no hay flujo del material en el núcleo (calculado en *Geofísica de la Tierra Sólida*).

## 7.3.4 La difusión magnética

- La difusión magnética también puede permitir que los rasgos del campo magnético se confluyan, además de decaer.



## 7.3.5 La combinación de advección y difusión

- En el núcleo, ambos advección y difusión ocurren simultáneamente.
- La advección de las líneas del campo magnético por el flujo en el núcleo es importante cuando se considera la geodinamo.
- Difusión se hace mas importante cuando crecen los gradientes en el campo, hasta que se llega a un punto cuando existe una balanza entre advección y difusión.
- Entonces, si la difusión no es originalmente relevante en la ecuación de inducción para el núcleo, será un factor importante en un estado del equilibrio.