

## 51334 GEOMAGNETISMO - Certamen 1

- Pregunta 1: 30 pts
- Pregunta 2: 30 pts
- Pregunta 3: 30 pts
- Pregunta 4: 10 pts

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) &= \rho && \text{:Ley de Gauss para electricidad} \\ \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H}) &= 0 && \text{:Ley de Gauss para magnetismo} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} && \text{:Ley de Faraday} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} && \text{:Ley de Ampere} \end{aligned}$$

Radio de la Tierra,  $a = 6378$  km

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

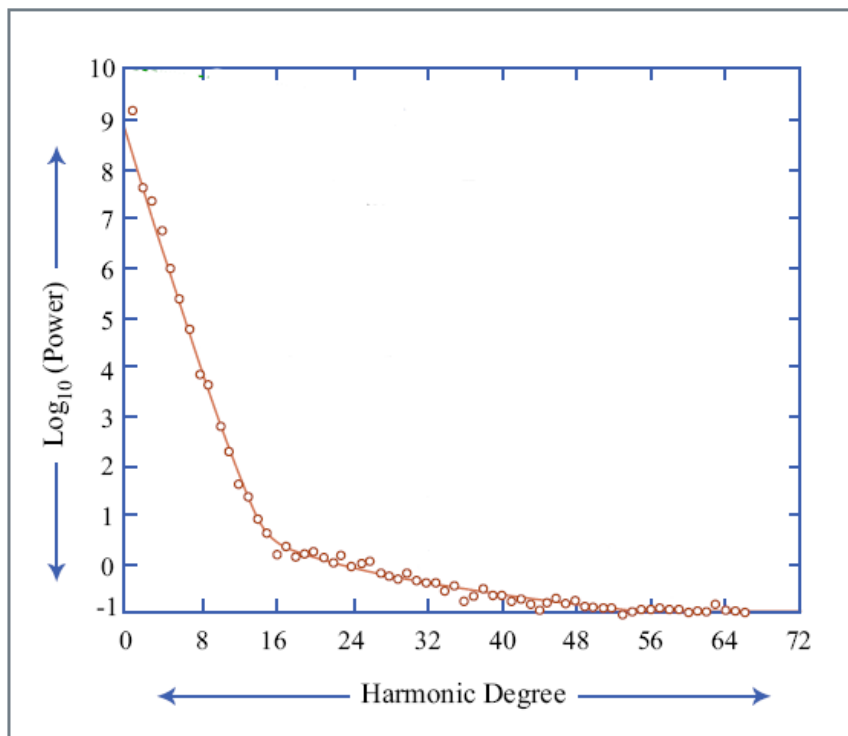


Fig 1: El espectro de potencia de los armónicos esféricos.

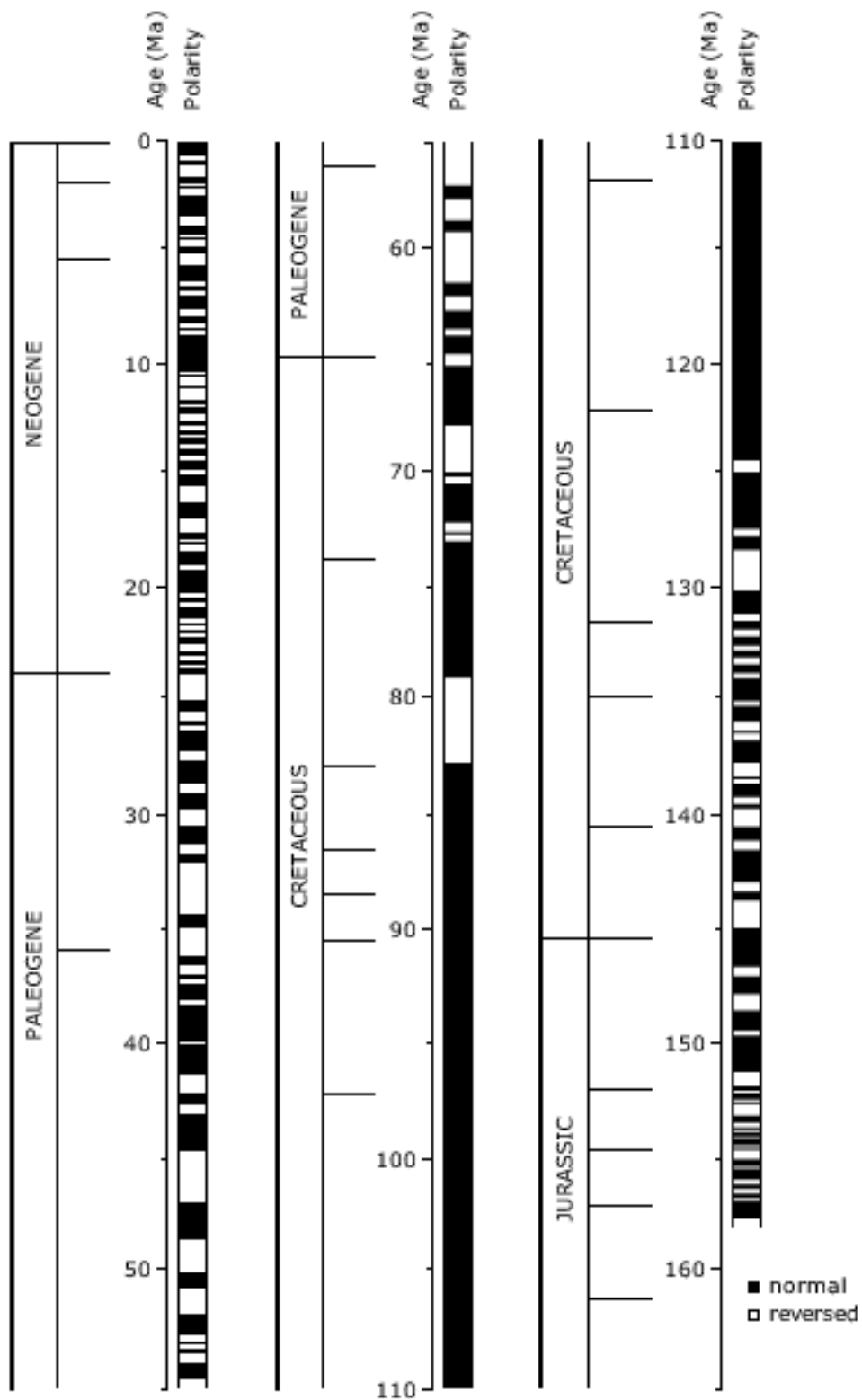


Fig 2: Geomagnetic Polarity Time Scale - Escala de tiempo de la polaridad geomagnética.

**TABLE 2.1**  
1980 epoch World Chart model coefficients

$l$	$m$	Main field (nT)		Secular change nT yr <sup>-1</sup>	
		$g$	$h$	$\dot{g}$	$\dot{h}$
1	0	-30,001	0	21.1	0.0
1	1	-1950	5634	12.1	-12.7
2	0	-2038	0	-21.6	0.0
2	1	3035	-2134	4.6	-12.0
2	2	1652	-179	4.5	-24.1
3	0	1293	0	-1.8	0.0
3	1	-2156	-38	-6.8	-0.1
3	2	1244	261	-2.4	2.0
3	3	851	-235	2.7	-2.9
4	0	919	0	-0.7	0.0
4	1	777	189	-2.5	1.5
4	2	411	-265	-5.1	0.1
4	3	-428	69	-3.5	3.9
4	4	224	-289	-2.2	-1.3
5	0	-216	0	-1.9	0.0
5	1	354	74	-1.3	3.7
5	2	261	147	-1.1	0.6
5	3	-66	-149	-4.0	-1.0
5	4	-173	-71	-1.2	1.9
5	5	-52	101	-0.1	1.3
6	0	51	0	1.3	0.0
6	1	57	-15	0.3	1.3
6	2	47	98	3.7	0.0
6	3	-194	75	2.6	-0.2
6	4	6	-44	1.1	-0.4
6	5	17	2	1.1	0.7
6	6	-104	27	0.4	2.1
7	0	65	0	0.0	0.0
7	1	-55	-71	-0.8	-2.5
7	2	7	-24	0.9	0.0
7	3	17	9	-0.4	1.0
7	4	-17	8	0.6	-0.5
7	5	-1	12	0.6	-0.9
7	6	16	-17	0.2	0.2
7	7	9	-14	0.9	-0.2
8	0	13	0	0.2	0.0
8	1	8	12	-0.1	-0.3
8	2	-4	-21	0.3	-0.6
8	3	-5	11	0.0	0.2
8	4	-12	-20	-0.2	-0.1
8	5	0	10	-0.7	0.6
8	6	-1	7	-0.2	-1.3
8	7	10	-13	-0.1	-0.2
8	8	3	-13	-0.5	0.2

Fig 3: Coeficientes de Gauss,  $g_l^m$  y  $h_l^m$  para algunos armónicos esféricos de la Tierra.

**Problema 1.** El potencial magnético de la Tierra puede ser expresado con armónicos esféricos:

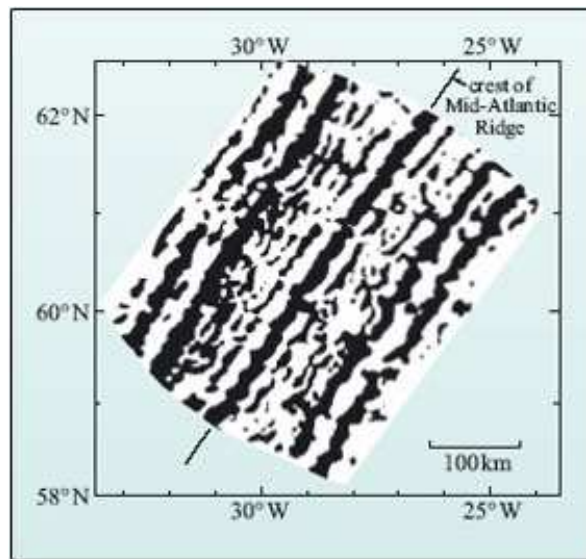
$$V = \frac{a}{\mu_0} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l (g_l^m \cos m\phi + h_l^m \sin m\phi) P_l^m(\cos \theta)$$

[6 pts] (a)

(i) Identifique la parte que depende sobre longitud, y encuentre una expresión para las longitudes donde  $V = 0$  (los nodos).

(ii) Explique por qué hay  $2m$  nodos, y use el hecho que el radio de la Tierra,  $a$ , es 6378 km para calcular la distancia entre esos nodos sobre el ecuador para  $m = 1$  y  $m = 10$ .

[7 pts] (b)



El gráfico muestra la anomalía magnética en el centro del océano Atlántico. Explique que son estas anomalías, y su forma en relación a los procesos geológicos en las dorsales. Por qué son útiles para la teoría de tectónicas de placas?

[5 pts] (c)

Explique cómo es posible obtener los datos para construir la escala de tiempo de polaridad geomagnética (Fig 2). Use este gráfico para estimar el más grande periodo en los últimos 160 millones de años sin una inversión en el campo magnético.

**[5 pts] (d)**

Asume una velocidad de separación de 10 cm cada año en una dorsal y use la respuesta de (c) para obtener una estimación del tamaño máximo de una anomalía magnética en un océano.

**[2 pts] (e)**

Qué valor de  $m$  (de los armónicos esféricos) está asociado con este tamaño máximo de la anomalía? [Parte (a)(ii) ayuda].

**[5 pts] (f)**

Use la respuesta de (e) para explicar el espectro de potencia del campo magnético de la Tierra en la Fig 1, especialmente el cambio en el gradiente en  $l \sim 14$ .

## Problema 2.

[6 pts] (a)

Compare el campo del núcleo, el campo de la corteza, y el campo externo. Piense sobre su generación, variación con el tiempo, magnitud relativa y escala de longitud (lengthscale) relativa.

[6 pts] (b)

El campo del núcleo es aproximadamente un dipolo, con potencial magnético

$$V = \frac{\mu_0 m_z \cos \theta}{4\pi r^2}.$$

Use el hecho que en coordenadas esféricas  $\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$ , y que  $B = -\nabla V$ , para mostrar:

(i) que el ángulo de inclinación ( $I$ ) (el ángulo del campo magnético con la horizontal), es dado por  $\tan I = 2 \tan \lambda$ , donde la latitud  $\lambda = 90 - \theta$ .

(ii) que la amplitud de un campo dipolar en los polos ( $\theta = 0, 180$ ) es el doble que la amplitud en el ecuador ( $\theta = 90$ ).

[6 pts] (c)

Para la Tierra,  $B_{polos} \sim 60,000$  nT, y  $B_{ecuador} \sim 25,000$  nT. Asuma que el bulto ecuatorial es de 22 km (es decir,  $r_{polos} = 6378$  km,  $r_{ecuador} = 6400$  km). Use la dependencia radial de  $B$  para calcular si sólo el bulto ecuatorial puede explicar la diferencia entre la teoría usando un modelo dipolar y los datos al ecuador. Si no, qué otros factores contribuyen?

[3+3+3+3=12 pts] (d)

Los datos de 5 rocas ígneas en Groenlandia, con edad de  $\sim 30$  millones de años, tiene estos valores de inclinación:

$$I = -67.2, -70.4, -64.6, -69.3, -66.6$$

- (i) Explique por qué  $I$  cambia para rocas de casi la misma edad ( $\pm 10,000$  años).
- (ii) Calcule la paleolatitud aproximada de estas rocas.
- (iii) Si este sitio en Groenlandia esta hoy día en 60N, y asume que sólo hay movimiento sur-norte, calcule la distancia que se ha movido Groenlandia en los últimos 30 millones de años, y su velocidad.
- (iv) Usando su conocimiento de velocidades de placas, está viable esta velocidad de Groenlandia? Hay otra explicación del por qué estas rocas tienen inclinación negativa?

**Problema 3.** La ley de Ohm para la densidad de corriente ( $\mathbf{J}$ ) es

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})), \text{ donde } \sigma \text{ es la conductividad.}$$

[3 pts] (a)

Use la ley de Ampere, y asuma que  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ , para llegar a

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma (\mathbf{E} + \mu_0(\mathbf{v} \times \mathbf{H}))$$

[6 pts] (b)

Tome el rotor ( $\nabla \times$ ) en ambos lados, use la regla  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H}$ , y use las ecuaciones de Maxwell para llegar a la ecuación de inducción magnética:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{H}$$

[3 pts] (c)

Explique las suposiciones usadas para obtener la ecuación de difusión desde la parte (b):

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{H}$$

[7 pts] (d)

Asuma un campo externo sinusoidal,  $H_z = H_0 e^{i\omega t}$ , sobre un semi espacio con conductividad  $\sigma$ . Use la ecuación de difusión de (c) para mostrar que una solución para el campo magnético en el semi espacio es

$$H_z = H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})}, \text{ cuando } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}.$$

[3 pts] (e)

Matemáticamente, que representa  $\delta$ ?

[5 pts] (f)

Use su respuesta de (e) para hacer una estimación de la frecuencia máxima con que es posible investigar un embalse geotermal, de 4 km de diámetro y 4 km de profundidad, con  $\sigma = 0.01$  S/m.

[3 pts] (g)

Tenemos  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$ . Es posible tener transmisión por el manto desde un campo que oscila a altas frecuencias en el núcleo, con suficiente amplitud para poder medirlo en la superficie?

**Problema 4.** [5+5=10 pts]

Escriba algo corto sobre 2 (**Dos**) de los siguientes tópicos:

- (a) La interacción entre el campo magnético de la Tierra y el viento solar.
- (b) Paleopolos y su utilidad en la teoría de tectónicas de placas.
- (c) Movimiento al oeste (Westward drift) del campo magnético.
- (d) Por qué, para  $m = 0$ , los coeficientes de Gauss  $h_l^m = 0$  (la tabla de coeficientes de Gauss está de la Fig 3).
- (e) Cómo medir anomalías magnéticas en los océanos, y cómo cambian estas anomalías si la corteza oceánica cambia su latitud?