Métodos Numéricos

Universidad de Concepción, Chile
Departamento de Geofísica
Programación Científica con Software libre

Primavera, 2011

Contenidos

Método de Euler

Considere el problema

$$\begin{cases} y'(x) & = & f(x,y) \\ y(a) & = & y_0 \end{cases} \tag{1}$$

para x $\in$ [a,b].

Una menera geométrica de aproximar la solución consiste en reemplazar la derivada y' por la aproximación

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h} \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos

$$y(x+h) \approx y(x) + h \cdot f(x,y) \tag{3}$$

Partiendo de la condición y(a) $= y_0$ el valor

$$y_1 = y(a) + h \cdot f(a, y(a)) \tag{4}$$

define una aproximación para y(a+h). Repitiendo el proceso se obtienen las aproximaciones hasta y(a+Nh). Usando x_i nodos equiespaciados tenemos el siguiente algoritmo

```
for i = 0,..., N-1
x(i) = a + ih
y(i+1) = yi + hf(xi,yi)
endfor
```

algoritmo euler

```
function [t,y]=eu(fu,a,b,y0,h)


t(1)=a;
y(1)=y0;

i=1;

while t(i)<b

i=i+1;
t(i)=t(i-1) +h;
y(i)=y(i-1) +h*feval(@fu,t(i-1),y(i-1));
endwhile

endfunction
```

lsode

En Octave la función **lsode** puede ser usada para resolver ODEs de la forma :

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

sujeto a la condición inicial $x(t_0) = x_0$, cuya sintaxis es :

```
x = lsode (@F, x_0, t)
```

ODEs

F es el nombre de la función f(x,t), la que puede estar definida mediante un archivo *function files* o como función en linea. x_0 y t denotan la condición inicial en t_0 y el dominio donde se realiza la integración respectivamente.

Ejemplo

La ecuación que rige el movimiento de un cuerpo en caida libre esta dada por:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v^2 \tag{5}$$

donde γ representa el coeficiente de arrastre del aire. Determine la velocidad de cuerpo si v(0) = 0 y $\gamma = 0.26$.

Ejemplo EDO orden 1

Definiendo función a integrar

```
function vdot = f(v,t)
m = 70; # kg
g = 9.81; # g m/s^2
vdot = -g+0.26*v.^2/m;
end
```

Solución

```
t  = 0:.1:30;
vi = 0;

v = lsode(@f,vi,t);
plot(t,v)
xlabel('timpo [s]');
ylabel('velocidad [m/s]');
```

Sistema de Ecuaciones

La resolución a problemas de valor inicial para sistemas de ODEs se realiza con los mismos comandos, pero en este caso la función $f(x,t)$ debe ser una función de valores vectoriales (vector columna). La condicion inicial y_0 también debe ser un vector columna de la misma dimensión

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x} & = & rx(1-\frac{x}{k}) - \frac{axy}{1+bx}, & x(0) = 1 \\ \dot{y} & = & \frac{1}{1+bx}xyca - dy, & y(0) = 2 \end{cases}$$

con r = 0.25; k = 1.4; a = 1.5; b = 0.16; c = 0.9; d = 0.8; en el dominio t $\in$ [0,50]

Ejemplo sistema de ecuaciones

Funcion

```
function xdot = F(x,t)
r = 0.25;
k = 1.4;
a = 1.5;
b = 0.16;
c = 0.9;
d = 0.8;
xdot(1) = r*x(1)*(1 - x(1)/k) - a*x(1)*x(2)/(1 + b*x(1));
xdot(2) = c*a*x(1)*x(2)/(1 + b*x(1)) - d*x(2);
endfunction
```

ODEs de 2 orden

Para resolver ecuaciones diferenciales de orden superior es necesario construir un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Consideremos la ecuación del oscilador amortiguado, donde el desplazamiento **u** de la posición de equilibrio de una masa sujeta a un resorte de constante **k**, inmersa en un medio viscoso queda expresado mediante la siguiente ecuación

$$mu'' + bu' + ku = 0$$

Hagamos el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \beta \\ \frac{d\beta}{dt} &= -\frac{b}{m}\beta - \frac{k}{m}u \end{aligned}$$

Este cambio de variables nos permite escribir la ecuación del oscilador armónico amortiguado como un sistema de ecuaciones . Resolvamos para m $=$ 1.2kg ; k $= 15\frac{kg}{s^2}$; b $= 0.3\frac{kg}{s}$
sujeto a la condición inicial u(0) $=$ 1; v(0) $=$ 1

Ejercicio

En aplicaciones de aerodinámica encontramos la ecuación de Blasius

$$2f''' + ff'' = 0$$

que da el perfil de velocidad en un fluido incompresible que se desliza sobre una capa delgada(la variable independiente se suele denotar por η).
Dos condiciones iniciales para este problema son f(0) = 0 y f'(0) = 0. Además se sabe que $f'(\eta) \to 1$ cuando $\eta \to \infty$

- Experimente con distintos valores de $f''(0)$ entre 0.1 y 0.5 para ver que valor de η puede tomarse como ∞
- Determine el valor correcto de $f''(0)$ para que $f'(\eta) \to 1$ cuando $\eta \to \infty$