513335 Geofísica de la Tierra Sólida

Presentación 1
El Sistema Solar
Versión 1.0

El sistema solar

Meta:
Usar la evidencia disponible hoy en día, junto con las leyes de física y química, para considerar la construcción y el estado inicial de la Tierra.

Evidencia:
Observaciones directas sobre rocas terrestres superficiales (+ la Luna, el Marte).
Observaciones directas sobre meteoritos que llegan a la superficie terrestre.
Estudios geofísicos en la Tierra (gravedad, magnetismo, terremotos, calor, deformación entre otros).
Estudios astronómicos directos sobre otras planetas (Voyager, por ejemplo)
Observaciones de observatorios astronómicos sobre el Sol y los planetas (espectroscopía, por ejemplo).
Observaciones de observatorios astronómicos sobre otras estrellas y planetas.

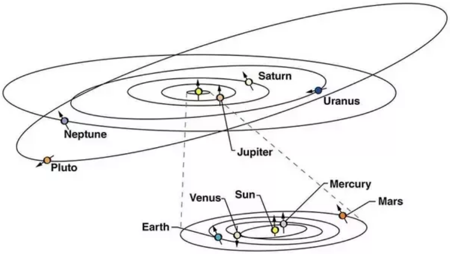
Si el sistema solar es un sistema cerrado,
$\Rightarrow$ *composición inicial* $\equiv$ *composición de hoy. (¿Eso es cierto?)*

El sistema solar

Los planetas giran alrededor del Sol ...

- en la misma dirección.
- en el mismo plano.

¿Qué significa esa observación?

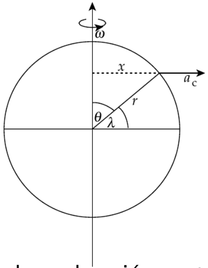


Fuente: NASA. *(Plutón ya no se considera como planeta)*.

El sistema solar

Basado en las observaciones de las órbitas, la pregunta surgió: ¿es debido a un colapso gravitacional de una nube esférica de gas/polvo que gira lentamente?

Fuente: Fund. Geophys., 2° Ed., Fig. 2.8.

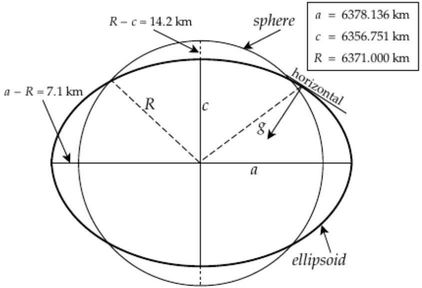


Se nota que la combinación de la aceleración centrífuga, a_c, y la aceleración gravitacional que actúa hacia el centro de masa, causará la esfera a convertirse a un disco.

El sistema solar

Este efecto se nota no solamente en las órbitas de los planetas. Además se nota en la forma de galaxias, y incluso en la forma de planetas.

Fuente: Fund. Geophys., 2° Ed., Fig. 2.20.



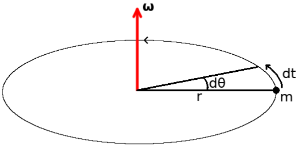
La figura muestra las dimensiones del elipsoide de referencia de la Tierra donde se nota su bulto ecuatorial. ¿Cual es el punto en la superficie de la Tierra lo más lejos de su centro?

Momento angular de un planeta en órbita

Debemos introducir el concepto de momento angular, $\bar{L}$, aquí aplicado a un planeta en órbita.

$$\bar{L} = I\bar{\omega} = mr^2\bar{\omega} \tag{1}$$

En esta ecuación, el momento de inercia, $I = mr^2$, se mide alrededor de un cierto eje con r la distancia perpendicular entre el eje y la masa m. ¿Qué representa físicamente el momento de inercia?



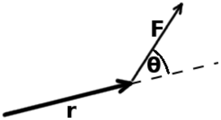
La velocidad angular, $\bar{\omega} = d\theta/dt$, depende de la rapidez de la rotación, y la dirección de la rotación (regla de la mano derecho).

Equivalencia entre lineal y angular

Lineal	**Angular**
$\bar{p} = m\bar{v}$	$\bar{L} = I\bar{\omega}$
$\bar{F} = m\bar{a}$	$\bar{\tau} = m\bar{\alpha}$

En la tabla, $\bar{\tau}$ representa torque (torsión mecánica) y $\alpha = d\bar{\omega}/dt$ representa aceleración angular. Se puede notar por la definición matemática del torque que esta fuerza causa cambios rotacionales.

$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F} = rF \sin\theta \tag{2}$$



¿Qué significa la frase "conservación del momento"?

Cabe mencionar que la forma de una órbita es una elipse en vez de un círculo. En la trayectoria de la órbita, mientras que el momento de inercia y velocidad angular cambian en diferentes partes de la elipse, el momento angular es conservado.

Momento angular en el sistema solar

- Para el sistema solar, $\bar{L} = \sum_i m_i r_i^2 \bar{\omega}_i$ donde la subíndice representa las diferentes masas (Sol, planetas etc.) y la distancia es hacia el centro de masa del sistema.
- El Sol contiene aproximadamente 99.9% de la masa del sistema solar, pero su distancia hacia el centro de masa del sistema solar está relativamente pequeña en comparación con los planetas.
- Los planetas tienen mayor velocidad angular ($\bar{\omega}_i$) pero sus masas (m_i) están relativamente pequeñas en comparación con el Sol.
- Esto implica que el sistema solar en total tiene relativamente poco momento angular.
- ¿El estado inicial del sistema solar, una nube esférica de gas / polvo, tenía mayor o menor momento de inercia que el sistema solar de hoy en día?
- Entonces, aplicando el principio de conservación del momento angular, ¿la nube inicial del sistema solar estaba girando lentamente o rápidamente?

Momento de inercia de un planeta alrededor de su proprio eje de giro

Recuerden que el momento de inercia de un planeta se mide alrededor de un cierto eje. Al mismo tiempo que se esta en órbita alrededor del Sol (una vez al año en el caso de la Tierra), el planeta esta girando alrededor de un eje que pasa por sus polos geográficos (una vez al día).

- Fuente: math.stackexchange.com
- $\hat{z}$ es el eje de giro del planeta,

sus polos geográficos pasan por este eje.

- θ representa la colatitud,

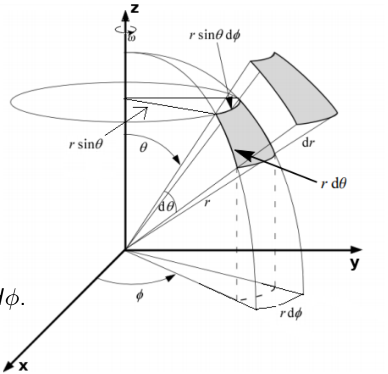
$\theta = 90 - \lambda$ donde λ es la latitud.

- ϕ representa la longitud.
- θ varía de 0° a 180°,

ϕ varía de 0° a 360° [o -180° a $180]^\circ$.

- En coordenadas esféricas,

$dV = (dr)(rd\theta)(r\sin\theta d\phi) = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$.



Momento de inercia de un planeta alrededor de su proprio eje de giro

Para calcular el momento de inercia del planeta, empecemos con la definición del I

$$I = \sum m r_{\perp}^2 \tag{3}$$

Para una distribución de masa en el espacio, la suma se convierte en una integral

$$I = \int_{\text{esfera}} r_{\perp}^2 \, dm \tag{4}$$

Recuerden que $r_{\perp}$ representa la la distancia perpendicular entre el eje y la masa, y, viendo la figura de las coordenadas esféricas se nota que

$$r_{\perp} = r \sin\theta \tag{5}$$

El elemento de masa dm es el volumen de un elemento multiplicado por la densidad del planeta en ese punto

$$dm = \rho(\bar{r}) dV \equiv \rho(\bar{r}) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \tag{6}$$

Momento de inercia de un planeta alrededor de su proprio eje de giro

Ahora estamos listos para calcular I usando las ecuaciones (4), (5) y (6) y los límites de latitud y longitud para una esfera de radio R

$$I = \int_{\text{esfera}} r_\perp^2 \, dm = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} (r \sin\theta)^2 \rho(\bar{r}) r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi \tag{7}$$

Práctica: para una esfera homogénea, demuestre que la evaluación de esta integral significa que

$$I = \frac{2}{5} M R^2 \tag{8}$$

donde M es la masa de la esfera y R es su radio.

Pista: van a tener que evaluar la integral de $\sin^3\theta$ *y en este caso es mejor manipular un poco usando la relación* $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \int_0^{\pi} \sin\theta(1 - cos^2\theta) d\theta = \int_0^{\pi} \sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta d\theta \tag{9}$$

Momento de inercia de la Tierra

Alrededor de su proprio eje de giro:

- $I_{\text{esfera homogénea}} = 0.4MR^2$
- $I_{\text{Tierra}} = 0.33M_T R_T^2$

¿Qué significa la palabra homogénea?

El momento de inercia de la Tierra es distinta a lo de una esfera homogénea ...¿qué significa eso?

El momento de inercia de la Tierra es menor a lo de una esfera homogénea ...¿qué significa eso? (Recuerden la definición $I = \sum mr_{\perp}^2$)

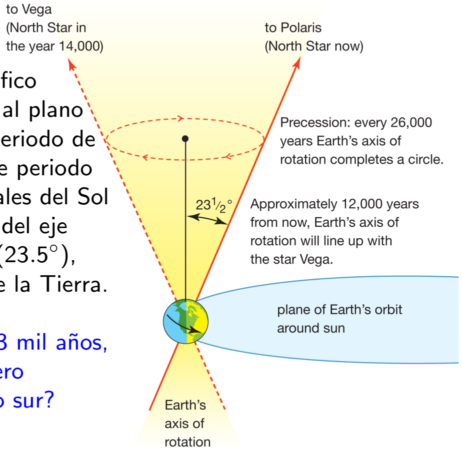
¿Cómo se mide el momento de inercia de la Tierra?

Momento de inercia de la Tierra

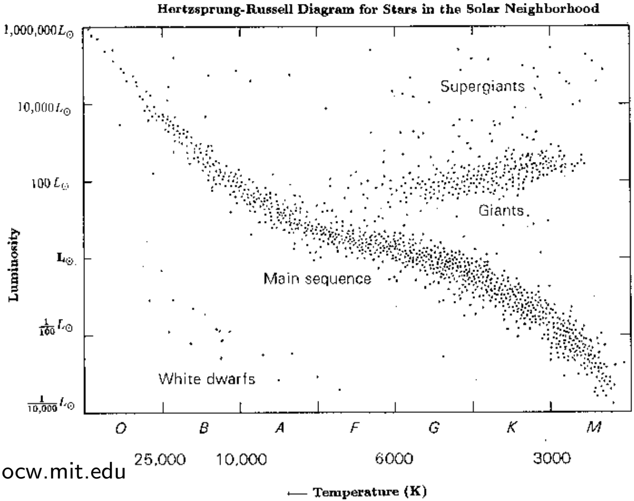
La precesión del polo Norte geográfico alrededor de la línea perpendicular al plano de la órbita de la Tierra tiene un periodo de aproximadamente 26000 años. Este periodo depende de los efectos gravitacionales del Sol y la Luna, el ángulo de inclinación del eje con respecto al plano de la órbita (23.5°), y además el momento de inercia de la Tierra.

¿Entonces, significa que en unos 13 mil años, durante los meses del enero y febrero tendremos invierno en el hemisferio sur?

Para mas información, se pueden leer sobre ciclos de Milankovitch



El Sol: Diagrama de Hertzsprung-Russell



Fuente: ocw.mit.edu

Diagrama de Hertzsprung-Russell

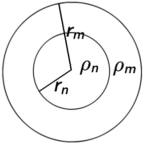
- La diagrama de Hertzsprung-Russell en la diapositiva anterior viene de observaciones de las estrellas.
- La luminosidad se mide relativo a la luminosidad solar donde $1L_{\odot} = 3.8 \times 10^{26} W$.
- La temperatura de la superficie del Sol es 5778 K hoy en día.
- Nuestro Sol pertenece a la secuencia principal, en esta secuencia caen las estrellas que queman hidrógeno (específicamente la fusión nuclear une hidrógeno para generar helio).
- Cuando las estrellas en la secuencia principal enviejan, su temperatura disminuye y muevan hacia el derecho de la diagrama en la secuencia principal.
- Modelación de nuestro Sol entrega estimaciones de su duración de vida cerca de $\sim 10 \times 10^{9}$ años.
- Las estrellas gigantes y supergigantes tienen mayores tamaños que las estrellas de la secuencia principal. Han agotados su hidrógeno y ahora están quemando elementos mas pesados. (Si quieren leer algo bastante interesante, leer sobre la estrella supergigante Betelgeuse).

Lectura adicional

- Apuntes del curso, Capitulo 1. Secciones 1.1, 1.2 y 1.3.
- Lowrie, Fundamentals of Geophysics, 2° Ed. Sección 1.1.3.5 "Angular momentum".
- Lowrie, Fundamentals of Geophysics, 2° Ed. Sección 2.3.4.4 "Precession and nutation of the rotation axis".
- Lowrie, Fundamentals of Geophysics, 2° Ed. Sección 2.3.4.5 "Milankovitch climatic cycles".
- Una simulación de la formación del sistema solar, con video.
- Milankovitch (Orbital) Cycles and Their Role in Earth's Climate (NASA JPL).

Preguntas prácticas

1. Realice la demostración matemática pedida en la diapositiva 11 para mostrar que, para una esfera homogénea, $I = 0.4MR^2$.
2. (a) Use integración para calcular el momento de inercia de un planeta que tiene un núcleo, densidad ρ_n radio r_n, y un manto, densidad ρ_m hasta un radio r_m. Revise que se obtiene la respuesta correcta ($I = 0.4MR^2$) cuando $\rho_m = \rho_n$.



(b) Use las siguientes valores para estimar la razón entre las densidades del núcleo y manto ($\rho_n : \rho_m$) para la Tierra.

$$I_{\text{Tierra}} \simeq 0.333 M_{\text{Tierra}} R_{\text{Tierra}} \quad ; \quad R_{\text{Núcleo}} \simeq 3480 \text{ km} \quad ; \quad R_{\text{Tierra}} \simeq 6371 \text{ km}$$

(c) Asumiendo que la Tierra en su estado inicial tenía una estructura homogénea, use la conservación del momento angular para calcular la duración de un día terrestre (en horas) hace 4550 Ma.