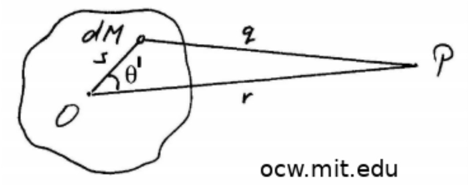
513335 Geofísica de la Tierra Sólida

Presentación 5
Potencial Gravitacional Debido a un Cuerpo Casi Esférico
Versión 1.0

Potencial gravitacional debido a un cuerpo cas esférico

- La meta es comparar mediciones de gravedad terrestre con un modelo de referencia.
- Entonces vamos a calcular una forma para el esferoide de referencia de la Tierra.

Consideremos un cuerpo **sin** simetría esférica.



El origen se sitúa en el centro de masa del cuerpo. ¿Cómo se define el centro de masa para un cuerpo tres dimensional? Cabe mencionar que el ángulo θ' no representa colatitud.

Queremos calcular $U(P)$, el potencial gravitacional en el punto P.

Potencial gravitacional debido a un cuerpo cas esférico

Integramos sobre los elementos de masa dM. En este sistema, los variables que cambian de valor con diferentes elementos dM son s, q, y θ'. La distancia r no depende de los dM, es la distancia entre el centro de masa y el punto P.

La contribución al potencial gravitacional, dU, del elemento de masa dM es

$$dU = \frac{-G}{q} dM \tag{1}$$

Ahora escribimos la distancia q en términos de r, s y θ'

$$q^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos\theta' = r^2\left(1 + \left(\frac{s}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{s}{r}\right)\cos\theta'\right)$$

¿Cómo se llama este ley?

Entonces, la ecuación (1) se convierte en

$$dU = \frac{-G}{r\left(1 + \left(\frac{s}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{s}{r}\right)\cos\theta'\right)^{\frac{1}{2}}} dM \tag{2}$$

Potencial gravitacional debido a un cuerpo casi esférico

En el próximo paso, vamos a usar la relación
$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2 + \text{t.o.m.}$ ¿Cómo se llama este teorema?

Los términos del orden mayor se pueden eliminar, par un cierto orden, cuando $x \ll 1$. Podemos manipular la ecuación (2) para $\frac{s}{r} \ll 1$:

$$\Rightarrow \left(1 + \left(\frac{s}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{s}{r}\right)\cos\theta'\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{s}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{s}{r}\right)\cos\theta'\right] + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}\right)\left[\left(\frac{s}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{s}{r}\right)\cos\theta'\right]^2 + \text{t.o.m.}$$

$$= 1 + \underbrace{\left(\frac{s}{r}\right)\cos\theta'}_{\text{orden s}} + \underbrace{\left(\frac{s}{r}\right)^2\left[\frac{-1}{2} + \frac{3}{8}\cdot 4\cos^2\theta'\right]}_{\text{orden s}^2} + \text{t.o.m.}$$

$$= 1 + \left(\frac{s}{r}\right)\cos\theta' + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{r}\right)^2\left[3\cos^2\theta' - 1\right] + \text{t.o.m.}$$

$$= 1 + \left(\frac{s}{r}\right)\cos\theta' + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{r}\right)^2\left[2 - 3\sin^2\theta'\right] + \text{t.o.m.}$$

Potencial gravitacional debido a un cuerpo cas esférico

Entonces la ecuación (2) se convierte a una versión simplificada sin los t.o.m.

$$\begin{aligned} dU &= \frac{-GdM}{r}\left(1+\left(\frac{s}{r}\right)^2-2\left(\frac{s}{r}\right)\cos\theta'\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{-GdM}{r}\left[1+\left(\frac{s}{r}\right)\cos\theta'+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{r}\right)^2\left[2-3\sin^2\theta'\right]\right] \end{aligned} \tag{3}$$

Y el potencial gravitacional en el punto, $U(P)$, es la contribución a todos los dU de los diferentes elementos de masa dM, es decir

$$\begin{aligned} U(P) &= \int_{\text{cuerpo}} dU = \frac{-G}{r}\int\left[1+\left(\frac{s}{r}\right)\cos\theta'+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{r}\right)^2\left[2-3\sin^2\theta'\right]\right]dM \\ &= \underbrace{-\frac{G}{r}\int dM}_{❶}\underbrace{-\frac{G}{r^2}\int s\cos\theta' dM}_{❷}\underbrace{-\frac{G}{r^3}\int s^2 dM}_{❸}+\underbrace{\frac{3}{2}\frac{G}{r^3}\int s^2\sin^2\theta' dM}_{❹} \end{aligned} \tag{4}$$

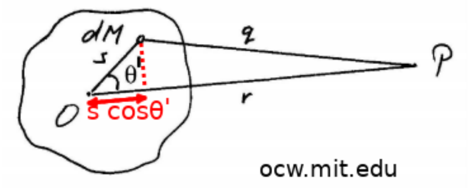
Esta ecuación se ve complicada, pero consideremos los cuatros términos aparte.

Término ❶

$$-\frac{G}{r}\int dM = -\frac{GM}{r}$$

- Este término representa el efecto de la masa puntual. Viendo la ecuación (4), se nota que este es el término que domina para grandes distancias $r \to \infty$.
- Recuerden que la distancia r es la distancia entre el centro de masa del cuerpo y el punto P.
- Entonces, a grandes distancias de un cuerpo de masa, su campo gravitacional es como lo de un punto de masa. ¡Podemos justificar modelar, por ejemplo, las órbitas de planetas como que los planetas tienen toda su masa en su centro!

Término ❷



- $s \cos\theta' dM$ representa el producto entre la masa dM y la distancia hacia el origen, en la dirección $\overrightarrow{OP}$.
- O es el punto en el centro del masa del cuerpo entonces el vector $\overrightarrow{OP}$ representa una línea que pasa por el centro del masa.
- Esta integral, las contribuciones de $s \cos\theta' dM$ sumado sobre todo el cuerpo, cancelará a cero!
- Este resultado funciona para cualquier línea que pasa por el centro del masa. ¡Eso es la definición del centro de masa para un cuerpo!

$$\int s \cos\theta' dM = 0$$

Término ❸

$\int s^2 dM$ tiene unidades de masa $\times$ distancia^2. Estas unidades son las mismas que algo que vimos en el capítulo 1 de este curso. ¿Recuerden la propiedad física de la Tierra que tiene las unidades de masa $\times$ distancia^2?

Vamos a definir el sistema de coordenadas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ de tres vectores perpendiculares con origen en el centro de masa del cuerpo. Entonces $s^2 = x^2 + y^2 + z^2$, y

$$\begin{aligned}\int s^2 dM &= \int \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dM \\ &= \frac{1}{2}\left[\int \left(y^2 + z^2\right) dM + \int \left(x^2 + z^2\right) dM + \int \left(x^2 + y^2\right) dM\right]\end{aligned}$$

$y^2 + z^2$ es la distancia^2 perpendicular entre el punto dM y el eje-x. Entonces, $\int \left(y^2 + z^2\right) dM$ es el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje-x, que llamaremos A. Se pueden conseguir similar expresiones para las otras dos partes de la ecuación, en total:

Término ❸

$\int (y^2 + z^2)\, dM \equiv A \equiv$ momento de inercia alrededor del eje-x

$\int (x^2 + z^2)\, dM \equiv B \equiv$ momento de inercia alrededor del eje-y

$\int (x^2 + y^2)\, dM \equiv C \equiv$ momento de inercia alrededor del eje-z

Entonces, en el término ❸ la integral es

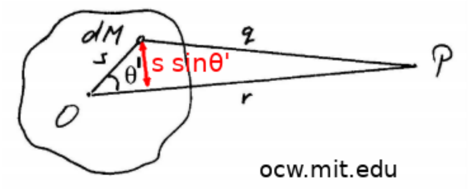
$$\int s^2 dM = \frac{1}{2}(A + B + C)$$

Con A, B y C los momentos de inercia definidos arriba.

¿ Cuál es la relación entre A, B y C para una distribución de masa con simetría radial?

Si el eje-z es el eje de rotación de la Tierra, y los otros dos ejes están en el plano ecuatorial, que momento de inercia esta distinta a los otros dos? (Simetría rotacional/cilíndrica).

Término ❹



- $s \sin\theta'$ es la distancia perpendicular entre la masa dM y el eje $\overrightarrow{OP}$.
- Entonces, $\int s^2 \sin^2\theta' dM$ es el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje $\overrightarrow{OP}$, lo llamaremos I.

$$\int s^2 \sin^2\theta' dM \equiv I$$

- Noten que el valor del I depende en la posición del punto P en el espacio tres dimensional.

Potencial gravitacional debido a un cuerpo casi esférico

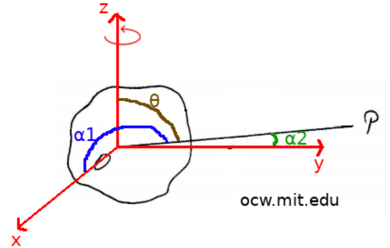
Luego de investigar estos cuatro términos, estamos listos para interpretar la ecuación (4) usando los momentos de inercia definidos anteriormente:

$$\begin{aligned} U(P) &= \underbrace{-\frac{G}{r}\int dM}_{❶} \underbrace{- \cancelto{0}{\frac{G}{r^2}\int s\cos\theta' dM}}_{❷} \underbrace{- \frac{G}{r^3}\int s^2 dM}_{❸} + \underbrace{\frac{3}{2}\frac{G}{r^3}\int s^2 \sin^2\theta' dM}_{❹} \\ &= -\frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3}(A+B+C) + \frac{3G}{2r^3} I \\ &= -\frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3}(A+B+C-3I) \end{aligned} \tag{5}$$

La ecuación (5) se llama la fórmula de MacCullagh.

¿Qué el la fórmula $U(P)$ para un cuerpo con simetría radial?

Cosenos directores y momentos de inercia



Los momentos de inercia I, A, B, y C se relacionan a través de los cosenos directores del vector $\overrightarrow{OP}$:

$$I = \ell^2 A + m^2 B + n^2 C \tag{6}$$

donde ℓ, m y n están relacionados con los ángulos entre los ejes x, y, z y el vector $\overrightarrow{OP}$:

$$\ell = \cos\alpha_1 \quad ; \quad m = \cos\alpha_2 \quad ; \quad n = \cos\theta \qquad (\ell^2 + m^2 + n^2 = 1)$$

Cosenos directores y momentos de inercia

Si se define el eje-z como el eje de giro del planeta, significa que θ es la colatitud. *Noten que θ, el ángulo entre el eje-z y el vector $\overrightarrow{OP}$, es completamente distinto al ángulo θ' usado en las ecuaciones (2), (3) y (4) en esta presentación.*

En este punto, vamos a definir el eje-z como el eje de giro para poder avanzar, y además considerar simetría rotacional/cilíndrica para el cuerpo. La situación se simplifica, ahora los dos momentos de inercia calculados alrededor de los dos ejes que pasan por el plano ecuatorial están lo mismo: $A \equiv B$. Entonces, la ecuación (6) con esta suposición, y usando el hecho que la suma de los cuadrados de los cosenos directores es uno, se cambia a:

$$\begin{aligned} I &= \ell^2 A + m^2 A + n^2 C \\ &= \ell^2 A + (1 - \ell^2 - n^2) A + n^2 C \\ &= A + (C - A) n^2 \\ &= A + (C - A) \cos^2 \theta \end{aligned} \tag{7}$$

con θ la colatitud del punto P, para reiterar.

Cosenos directores y momentos de inercia

Entonces, para manipular parte de la fórmula de MacCullagh (ecuación (5)) para un planeta con simetría rotacional:

$$\begin{aligned} A + B + C - 3I &= 2A + C - 3[A + (C - A)\cos^2\theta] \\ &= 2A + C - 3A - 3(C - A)\cos^2\theta \\ &= C - A - 3(C - A)\cos^2\theta \\ &= (C - A)[1 - 3\cos^2\theta] \\ &= -(C - A)[3\cos^2\theta - 1] \end{aligned}$$

Como se puede ver, esta parte de la fórmula de MacCullagh depende de:

1. La diferencia entre el momento de inercia del cuerpo alrededor de su eje de giro y el momento de inercia del cuerpo alrededor de un eje que pasa por su plano ecuatorial (C-A).
2. La colatitud, θ, del punto P.

Potencial gravitacional debido a un cuerpo casi esférico

La ecuación (5) se convierte al:

$$\begin{aligned} U(P) &= -\frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3}(A + B + C - 3I) \\ &= -\frac{GM}{r} + \frac{G}{r^3}(C - A)\left[\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right] \end{aligned} \quad (8)$$

Podemos representar la diferencia entre los momentos de inercia C y A como una fracción, J_2 de Ma^2 donde a es el radio ecuatorial del planeta:

$$(C - A) = J_2 M a^2 \quad (9)$$

J_2 se llama el factor de forma dinámica para un planeta y es una medida de elipticidad. Entonces

$$U(P) = \underbrace{-\frac{GM}{r}}_{\text{masa puntual}} + \underbrace{\frac{GJ_2Ma^2}{r^3}\left[\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right]}_{\text{corrección por el ``bulto ecuatorial''}} \quad (10)$$

Si queremos calcular un modelo de referencia para gravedad terrestre, ¿qué nos falta? (próxima clase).

Lectura adicional

- Apuntes del curso, Capitulo 2. Sección 2.2.
- Lowrie, Fundamentals of Geophysics, 2° Ed. Box 1.5 p. 36 "Direction cosines".
- Lowrie, Fundamentals of Geophysics, 2° Ed. Sección 2.4.1 "The figure of the Earth".
- Lowrie, Fundamentals of Geophysics, 2° Ed. Sección 2.4.2 "Gravitational potential of the spheroidal Earth".

Preguntas prácticas

Estamos en la mitad de una cálculo. Pido un poco mas de paciencia para preguntas prácticas en este capítulo.