Universidad de Concepción

513335 Geofísica de la Tierra Sólida

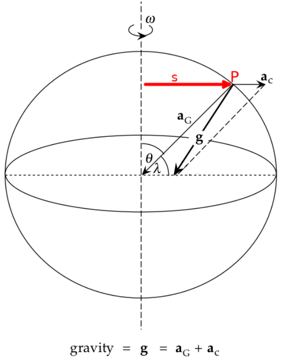
Presentación 6
La Gravedad de la Tierra
Versión 1.1

Potencial gravitacional debido a una rotación por un eje

En el marco de referencia en que el observador, P, se siente estacionario, la fuerza centrífuga debido a la rotación de la Tierra, $\bar{F}_c$, apunta en la dirección hacia afuera del eje de rotación. (Este marco representa un observador en la superficie Terrestre tomando una medición de gravidad).

$$\bar{F}_c = -m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{s}) = ms\omega^2\hat{s} \quad [\mathrm{N}] \tag{1}$$

Fuente: Fund. Geophys., 2° Ed., Fig. 2.23. (modificada)



Potencial gravitacional debido a una rotación por un eje

La aceleración centrífuga es esta fuerza por unidad de masa:

$$\bar{a}_c = \frac{\bar{F}_c}{m} = s\omega^2\hat{s} = \sqrt{(x^2+y^2)}\omega^2\hat{s} \quad \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\right] \tag{2}$$

Recuerden que el eje $\hat{z}$ es el eje de la rotación terrestre, entonces la distancia perpendicular al este eje s es $\sqrt{(x^2+y^2)}$ y $\hat{s} = \frac{(x,y,0)}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$.

Esta aceleración centrífuga viene de un potencial

$$U_c = -\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{a}_c &= -\nabla U_c = (\omega^2 x, \omega^2 y, 0) \\ &= \omega^2(x,y,0) = \sqrt{(x^2+y^2)}\omega^2\hat{s} \end{aligned}$$

Potencial gravitacional debido a una rotación por un eje

Podemos escribir este potencial en términos de la colatitud (θ) o la latitud (λ)

$$\begin{aligned} U_c &= -\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) \\ &= -\frac{1}{2}s^2\omega^2 \\ &= -\frac{1}{2}r^2\cos^2\lambda\omega^2 \\ &= -\frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\omega^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Recuerden que siempre se pueden intercambiar entre la latitud y la colatitud

$$\lambda = 90 - \theta$$

$$\cos\lambda = \cos(90-\theta) = \cancelto{0}{\cos(90)}\cos(-\theta) - \cancelto{1}{\sin(90)}\sin(-\theta) = \sin\theta$$

$$\sin\lambda = \sin(90-\theta) = \cancelto{1}{\sin(90)}\cos(-\theta) + \cancelto{0}{\cos(90)}\sin(-\theta) = \cos\theta$$

Potencial gravitacional de la Tierra

El potencial gravitacional de la Tierra es la combinación del efecto gravitacional de la distribución de masa de la Tierra con el efecto de la rotación de la Tierra.

$$U(P) = \underbrace{-\frac{GM}{r}}_{\text{masa puntual}} + \underbrace{\frac{GJ_2Ma^2}{r^3}\left[\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right]}_{\text{corrección por el ``bulto ecuatorial''}} \underbrace{-\frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\omega^2}_{\text{rotación}} \tag{5}$$

- G es la constante de Gravitación
- M es la masa de la Tierra
- r es la distancia entre el punto de observación y el centro de masa de la Tierra
- J_2 es el factor de forma dinámica de la Tierra, asociado con su elipticidad
- a es el radio ecuatorial de la Tierra (6378 km)
- θ es la colatitud del punto de observación
- ω es la tasa de rotación de la Tierra

¿Por qué no aparece la longitud, ϕ, en esta expresión?

Campo gravitacional de la Tierra

Para convertir entre el potencial calculado y el campo gravitacional de la Tierra

$$\bar{g} \equiv (g_r, g_\lambda) = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right) \tag{6}$$

El primer término, el componente radial, domina comparado con el segundo término y entonces podemos estimar el valor de g, medido por gravímetros, como

$$g = |\bar{g}| = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \approx \frac{\partial U}{\partial r} \tag{7}$$

Entonces, hemos encontrado una expresión para el valor de g terrestre que depende de distancia desde el centro de la Tierra, y la latitud de la medición:

$$g = \frac{GM}{r^2} - \frac{3GJ_2Ma^2}{r^4}\left(\frac{3}{2}\sin^2\lambda - \frac{1}{2}\right) - r\omega^2\cos^2\lambda \tag{8}$$

Esta expresión es una aproximación independiente de la longitud, con una variación suave en la dirección de la latitud, para el valor de g referencial que uno debe medir.

Campo gravitacional de la Tierra

Se puede usar la ecuación (8) para conocer el valor referencial de g en la superficie terrestre, escribiendo la distancia r como una función de la latitud λ para tomar en cuenta la forma elipsoidal de la Tierra.

En este caso, consideremos los dos casos extremos, lo de los polos ($\lambda = \pm 90$) y lo del ecuador ($\lambda = 0$).

$$g_{\text{Polo}} = \frac{GM}{c^2} - \frac{3GJ_2Ma^2}{c^4} \tag{9}$$

$$g_{\text{Ecuador}} = \frac{GM}{a^2} + \frac{3GJ_2Ma^2}{2a^4} - a\omega^2 \tag{10}$$

En estas ecuaciones,

- c es el radio polar de 6357 km.
- a es el radio ecuatorial de 6378 km.

¿Por qué no debería aparecer el término con ω en la expresión para g_{Polo}?

La ecuación de Somigliana

Se puede aproximar la ecuación (8) en varias maneras para representar g en la superficie terrestre, por ejemplo la ecuación de Somigliana:

$$g(\lambda) = g_{ec}\left[\frac{1 + k\sin^2\lambda}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\lambda}}\right] \tag{11}$$

En esta ecuación, $g(\lambda)$ es el valor de g a diferentes latitudes en la superficie terrestre a 0 m s.n.m. Los valores de los constantes k y e^2, y la gravedad ecuatorial g_{ec}, están definidos precisamente para entregar el mejor ajuste posible entre este modelo y la situación actual en la Tierra.

- $g_{ec} = 9.7803267714 \text{ ms}^{-2}$
- $k = 0.00193185138639$
- $e^2 = 0.00669437999013$

¿Por qué es importante que la función $\sin^2\lambda$ sea simétrica alrededor de $\lambda = 0$?

En la realidad, siempre no es posible medir g a una elevación de 0 m s.n.m. ¿Es un problema eso?

La ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson relaciona la densidad en un cierto punto con las variaciones en el potencial gravitacional a través del punto:

$$\nabla^2 U(\bar{r}) = 4\pi G\rho(\bar{r}) \tag{12}$$

Es decir,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 4\pi G\rho(\bar{r}) \tag{13}$$

O, en coordenadas esféricas,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2} = 4\pi G\rho(\bar{r}) \tag{14}$$

La ecuación de Laplace

Siempre en la geofísica medimos la gravedad en la superficie de la Tierra, o más afuera (satélites), donde $\rho(\bar{r}) \approx 0$. Entonces para el potencial gravitacional de la Tierra la ecuación de Laplace es importante:

$$\nabla^2 U(\bar{r}) = 0 \tag{15}$$

O, en coordenadas esféricas,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = 0 \tag{16}$$

El potencial gravitacional de la Tierra, en su superficie hacia afuera, cumpla con la ecuación de Laplace. El potencial U dado por la ecuación de Laplace se relaciona con el campo gravitacional por $\bar{g} = -\nabla U$.

¿Las soluciones a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas son qué tipo de funciones?

Lectura adicional

- Apuntes del curso, Capítulo 2. Secciones 2.2 y 2.3.
- Lowrie, Fundamentals of Geophysics, 2° Ed. Box 2.2 p. 64 "Legendre polynomials".
- Lowrie, Fundamentals of Geophysics, 2° Ed. Box 2.3 p. 65 "Spherical harmonics".
- Lowrie, Fundamentals of Geophysics, 2° Ed. Sección 2.4.3 "Gravity and its potential".
- Lowrie, Fundamentals of Geophysics, 2° Ed. Sección 2.4.4 "Normal gravity".

Preguntas prácticas

1. (a) La ecuación derivada en esta presentación para la gravedad referencial de la Tierra es:

$$g = \frac{GM}{r^2} - \frac{3GJ_2Ma^2}{r^4}\left(\frac{3}{2}\sin^2\lambda - \frac{1}{2}\right) - r\omega^2\cos^2\lambda$$

Calcule la contribución de cada de los tres términos al valor de g en (i) los polos, (ii) el ecuador, (iii) la latitud de Concepción.

Ubicación	1° término	2° término	3° término	g
Polos				
Ecuador				
Concepción				

(b) Explique cómo las características de la Tierra influencian sobre los valores de los términos calculados en la parte (a).

Preguntas prácticas

(c) Use la ecuación de Somigliana para calcular el valor de g en los mismos puntos que la parte (a). Estime la diferencia entre los dos modelos (calculado como un porcentaje).

$$g(\lambda) = g_{ec}\left[\frac{1 + k\sin^2\lambda}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\lambda}}\right]$$