Geofísica de la Tierra Sólida

Stress & Strain

Alejandra Muñoz J. *

18 de Junio de 2010

1. Introducción

La Sismología es la ciencia que estudia los terremotos y la propagación de ondas elásticas a través de la Tierra. En teoría, los terremotos son provocados por ciertos movimientos bruscos debido al movimiento de las placas, y se propagan a través de tres tipos de ondas: las ondas P, las ondas S y las ondas superficiales (Rayleigh y Love). Para analizar en forma completa el movimiento de las partículas de la Tierra (medio de propagación) es necesario desarrollar la teoría de propagación de ondas elásticas, la cual tiene por base los conceptos de Strain (deformación) y Stress (estrés).

2. Strain

- Medida geométrica de deformación que representa el desplazamiento relativo entre las partículas de un cuerpo material, i.e. es una medida de cuánto un desplazamiento dado difiere localmente de un desplazamiento de cuerpo rígido.
- Es un cambio en las propiedades métricas de un cuerpo.
- Equivale a *Deformación*. $\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{(l-L)}{L}$
- Puede causarse por cambios en el campo de temperaturas del cuerpo o como resultado de la acción de un campo de stress inducido por fuerzas aplicadas (Ley de Hooke - Ley de Young en 1D).
- Es una cantidad *Adimensional*, puede expresarse como una tasa o un porcentaje.
- Se simboliza por ϵ - Existen deformaciones normales y de cizalle (shear).
- Geométricamente, para las deformaciones normales:

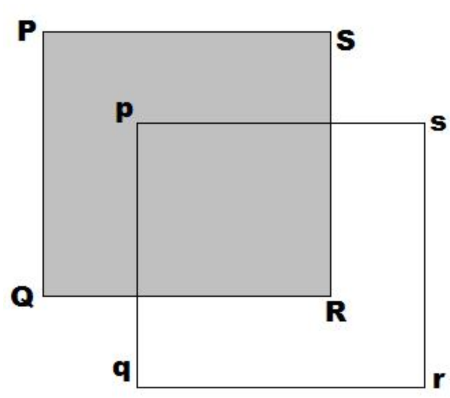

Figura 1: Strain normal de una superficie.

*Cs. Fís. y Astron.- Geofísica, Departamento de Geofísica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Concepción, Chile.

Aquí:

$$\begin{aligned} Q(x,y) &\rightarrow q(x',y') \\ R(x+\delta x,y) &\rightarrow r(x'+\delta x',y') \\ S(x+\delta x,y+\delta y) &\rightarrow s(x'+\delta x',y'+\delta y') \\ P(x,y+\delta y) &\rightarrow p(x',y'+\delta y') \end{aligned}$$

Entonces, se produce una deformación (desplazamiento)

$$\begin{aligned} w_x(x,y) &= x - x' \\ w_y(x,y) &= y - y' \end{aligned}$$

Luego

$$w_x(x+\delta x,y) = x + \delta x - (x'+\delta x')$$

pero, al realizar la expansión en Taylor, se tiene que:

$$w_x(x+\delta x,y) = w_x(x,y) + \frac{\partial w_x}{\partial x}\delta x$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} x + \delta x - (x'+\delta x') &= x - x' + \frac{\partial w_x}{\partial x}\delta x \\ \Rightarrow \delta x &= \delta x' + \frac{\partial w_x}{\partial x}\delta x \end{aligned}$$

Luego, se define el tensor de Strain normal como:

$$\epsilon_{xx} \equiv \frac{\delta x - \delta x'}{\delta x}$$

entonces, para este caso

$$\epsilon_{xx} = \frac{\delta x' + \frac{\partial w_x}{\partial x}\delta x - \delta x'}{\delta x} = \frac{\partial w_x}{\partial x}$$

Análogamente para y, y para z

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial w_y}{\partial y} \ , \ \epsilon_{zz} = \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

Se define como *Dilatación Cúbica* (cambio de volumen):

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \\ &= \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \\ &= \nabla \cdot \mathbf{w} \end{aligned}$$

lo que equivale a una divergencia del campo de desplazamiento.

- Para las deformaciones de cizalle, geométricamente:

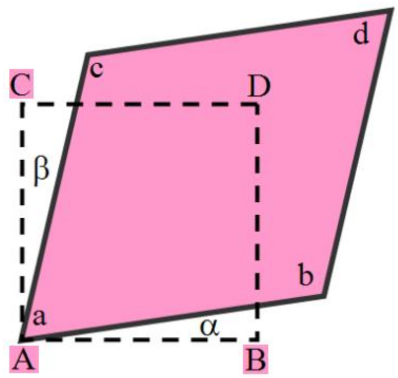

Figura 2: Strain de cizalle (shear) de una superficie.

Aquí:

$$\begin{aligned} A(x,y) &= a(x,y) \\ B(x+\delta x,y)\to q &\Rightarrow -w_y(x+\delta x,y) \\ C(x,y+\delta y)\to c &\Rightarrow -w_x(x,y+\delta y) \end{aligned}$$

Luego, considerando ángulos muy pequeños:

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{-w_y(x+\delta x,y)}{\delta x}\approx\alpha \\ \tan\beta &= \frac{-w_x(x,y+\delta y)}{\delta y}\approx\beta \end{aligned}$$

Análogamente al caso normal

$$\begin{aligned} w_y(x+\delta x,y) &= w_y(x,y)+\frac{\partial w_y}{\partial x}\delta x \\ w_y(x,y+\delta y) &= w_x(x,y)+\frac{\partial w_x}{\partial y}\delta y \end{aligned}$$

Si $w_y(x,y)=0$ y $w_x(x,y)=0$, entonces se tiene que

$$\alpha=-\frac{\partial w_y}{\partial x}\ ,\ \beta=-\frac{\partial w_x}{\partial y}$$

El ángulo en a puede escribirse de la manera

$$\angle a\equiv\frac{\pi}{2}+2\epsilon_{xy}$$

lo que implica que el tensor de Strain de cizalle puede escribirse como

$$\epsilon_{xy}=-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

Dadas las expresiones para los ángulos α y β, se tiene que el tensor de Shear Strain se define

$$\epsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}+\frac{\partial w_y}{\partial x}\right)$$

El mismo análisis para las otras dimensiones establece que

$$\epsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_y}{\partial z}+\frac{\partial w_z}{\partial y}\right)\ ,\ \epsilon_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_z}{\partial x}+\frac{\partial w_x}{\partial z}\right)$$

Fórmula General del Tensor de Strain

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial j} + \frac{\partial w_j}{\partial i}\right)$$

Propiedad útil: Simetría

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial j} + \frac{\partial w_j}{\partial i} &= \frac{\partial w_j}{\partial i} + \frac{\partial w_i}{\partial j} \\ \Rightarrow \epsilon_{ij} &= \epsilon_{ji} \\ \Rightarrow \bar{\epsilon} &= \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ & & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aquí $Tr(\bar{\epsilon}) = \Delta$. Si $\epsilon_{ii} = 0$, $\bar{\epsilon}$ correspondería a una rotación.

3. Stress

- Es la cantidad de fuerza promedio por unidad de área ejercida sobre una superficie.
- Es la resistencia interna que un material presenta frente a la deformación (strain) y es medida en términos de la carga aplicada.
- Es una medida de la intensidad de las fuerzas internas actuando entre las partículas de un cuerpo deformable (no rígido) como una reacción a las fuerzas externas aplicadas sobre el mismo cuerpo.
- Es una cantidad continua, i.e. es una función continua que depende del espacio y del tiempo.
- Su unidad de medida es el Pascal $[Pa] = [N/m^2]$ al igual que la presión hidrostática ($[bar] = 10^{-5}[Pa]$)
- La presión es un caso particular del tensor de Stress.
- Se simboliza por σ
- Geométricamente:

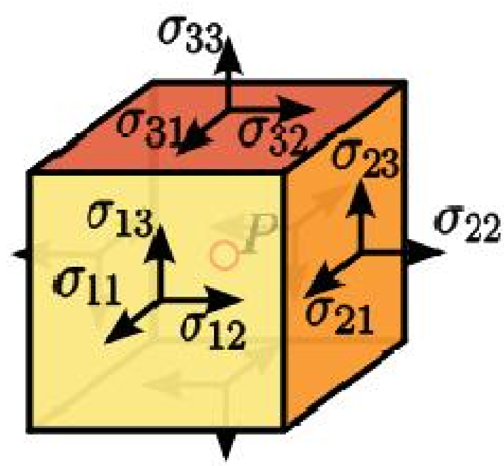

Figura 3: Representación geométrica del tensor de Stress.

Notación: σ_{ij}
i: superficie del cuerpo perpendicular al eje donde se aplica la fuerza.
j: sentido en el que se aplica la fuerza.
Entonces:

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

De la misma manera que para el tensor de Strain, existen Stress normal y de cizalle. Los Stress normales corresponden a los ubicados en la diagonal, y para ellos se cumple que:

$$Tr(\bar{\sigma}) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 3p$$

donde p es la presión.
Los σ_{ij} con $i \neq j$ corresponden al Shear Stress.
De la misma forma que el Strain, el Stress es simétrico con respecto a su diagonal, i.e.

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ & & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Se define el *Deviatoric Stress* como $\bar{\sigma}' = \bar{\sigma} - p$

$$\bar{\sigma}' = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - p & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - p & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - p \end{pmatrix}$$

muchas veces por simplicidad esta expresión para el *deviatoric stress* se utiliza para denotar al Stress.

4. Relación entre el Stress y en Strain

En 1D se tiene la Ley de Young:

$$\sigma = E\epsilon$$

Pero en 3D, ésto se expresa 'ligeramente' diferente:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\, \epsilon_{kl}$$

Aquí, σ_{ij} es el tensor de stress, ϵ_{kl} es el tensor de strain, y C_{ijkl} es el tensor de Elasticidad o Rigidez.
El tensor de Elasticidad $\bar{C}$ tiene 81 componentes, pero gracias a las propiedades de simetría de $\bar{\sigma}$ y de $\bar{\epsilon}$, éstas se reducen a 21 componentes independientes, que se utiliza en el caso más general. Sin embargo, si el medio es isotrópico y homogéneo, $\bar{C}$ se reduce a tener sólo 2 componentes independientes, las cuales están dadas por los *Parámetros de Lamè* λ y μ.
Luego

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Entonces, así:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl}\, \epsilon_{kl} \\ &= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\epsilon_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl}\epsilon_{kl} + \mu\delta_{il}\delta_{jk}\epsilon_{kl} \\ &= \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij} \end{aligned}$$

notar aquí que al escribir ϵ_{kk} se está utilizando la notación de Einstein, por lo que $\epsilon_{kk} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$.
Luego:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\Delta + 2\mu\epsilon_{ij}$$

Ahora, qué importancia tiene ésto para la sismología y la propagación de las ondas?
Se tiene que la ecuación de movimiento para un medio elástico puede expresarse como sigue:

$$\rho\ddot{\vec{w}} = \nabla \cdot \bar{\sigma} + \vec{f}$$

en sismología, si se considera una onda de alta frecuencia y lejos de la fuente sísmica, $\vec{f} = 0$, por lo que

$$\rho\ddot{\vec{w}} = \nabla \cdot \bar{\sigma} \;\Leftrightarrow\; \rho\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = \partial_j\sigma_{ij}$$

Reemplazando la expresión para $\bar{\sigma}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial w_k}{\partial x_k} + \mu\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} \\ \Rightarrow \rho\ddot{\vec{w}} &= (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{w}) + \mu\nabla^2\vec{w} \\ \Rightarrow \rho\ddot{\vec{w}} &= (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{w}) - \mu\nabla \times \nabla \times \vec{w} \end{aligned}$$

Luego, reordenando:

$$\ddot{\vec{w}} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\nabla(\nabla \cdot \vec{w}) - \frac{\mu}{\rho}\nabla \times \nabla \times \vec{w} \tag{4.24}$$

Ésta es la ecuación de propagación de ondas sísmicas de alta frecuencia, lejos de la fuente, en un medio continuo, homogéneo, isotrópico y elástico.

Anexo: Parámetros Medibles en Sismología

- μ: Módulo de Cizalle (Shear Modulus), resistencia al cizalle de un material. En líquidos $\mu = 0$

- E: Módulo de Young, parámetro de elasticidad. Tasa entre el stress de extensión y el strain de extensión.

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

- κ: Módulo de 'Bulk', parámetro de incompresibilidad. Tasa entre la presión hidrostática y el cambio de volumen sufrido por el cuerpo.

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu = -\frac{\partial p}{\partial \Delta}$$

- σ: Módulo de Poisson, parámetro de contracción. Tasa entre la contracción lateral y la extensión longitudinal.

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Se habla de un medio de Poisson cuando $\lambda = \mu \Rightarrow \sigma = \frac{1}{4}$